Årg. 29: 3 Sept. 1946

ELEMENTA

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16 IV STOCKHOLM

TREDJE HÄFTET

Sid.

Joh. Hagne, Om dubbelförhållanden och hyperbolisk längdmätning ... 129

Lars-Erik Nordström, Volymetrisk bestämning av luftens syrehalt..... 141

Gösta Danielsson, En olikhet för de in- och omskrivna sfärernas radier i en tetraeder. II 144

Torsten Jönsson, Elektroniklaboratoriet vid Chalmers tekniska högskola. III 147

Björn Löttiger, Principerna för avmagnetisering av fartyg 161

Bokanmälningar: Sjöstedt, Projektiv geometri; Kollros, Cours de géométrie projective; Duporcq, Premiers principes de géométrie moderne; Green, Introduction to Differential Equations; Ince, Integration of Ordinary Differential Equations; Johansen, Matematikken i oldtiden; Bok, The Milky Way; Shapley, Galaxies; Goldberg-Aller, Atoms, Stars and Nebulae; Johnson, Time, Knowledge and the Nebulae; Oranje, Grundlagen, Anwendungen, Eigenschaften von Gasentladungslampen; Randers, Atomkraften, verdens håp eller undergang; Harvey, High Frequency Thermionic Tubes; Higgy, Fundamental Radio Experiments; Müller-Garman-Droz, Experimental Electronics; Fuson-Snyder, Organic Chemistry; Vogel, Qualitative Chemical Analysis; Weinstein, Precious and Semi-Precious Stones; Teknisk Bokkatalog 1946 168

Gradualavhandlingar: Tore Nilsson, Några sultoner, deras framställning och hydrolys; Sven Cederblad, Studies of Bright Diffuse Galactic Nebulae with Special Regard to Their Spatial Distribution; Nils Erik Fremberg, A Study of Generalized Hyperbolic Potentials with some Physical Applications 178

Problemavdelning:

Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman)..... 183

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid fyllnadsprövning efter studentexamen aug.-sept. 1946..... 187

Tidskrifter, innehållsöversikt 186

Pris pr år kr. 8: — pr häfte kr. 2: 50

ELEMENTA

Utgivare: adjunkt C. E. Blom, professor G. Borelius, adjunkt S. Bågman, lektor G. Starck, och lektor A. Wahlgren. Redaktör och ansvarig utg.: C. E. Blom.

Årligen fyra häften om i regel 64 sid. (mars, juni, sept., dec.). Pris pr år kr. 8:-, pr häfte kr. 2:50. Subskription sker enklast genom inbetalning av kr. 8:- å postgirokonto nr. 527 55, då tidskr. erhålles pr utgivarekorsband. Abonnemang även genom bokhandeln.

Äldre årgångar erhållas direkt från expeditionen till följande priser: Årg. *3*, *6—11*, *13—16* à 6 kr. pr årg., årg. *17—28* à 8 kr. Bundna i klotband, två årg. i varje bd årg. *7—8*, *9—10*, *13—14*, *15—16* à 14 kr. pr band, årg. *17—18*, *19—20*, *21—22*, *23—24*, *25—26* à 18 kr. pr band.

Innehållsregister till årg. *1—16* à 1 kr. och till årg. *17—24* à 1 kr.

Pärmar avsedda för två årg. till kr. 1:75 pr st.

På grund av materialbrist kunna pärmar ej tillverkas för närvarande. Pärmar till årg. 27—28 (1944—1945) finnas ej, och lagret av pärmar till äldre årg. är obetydligt. Gör förfrågan innan likvid insändes.

Särtryck ur Elementa:

1. Axel Nordhult, De viktigaste konstruktions- och driftsegenskaperna hos likströmsmaskinerna, kr. 1: —.
2. Martin Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 1: —.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 1: —.
4. J. Tandberg, Vinkelns tredelning. Slutsåld.
5. Gustaf Ljunggren, Gasskyddets kemi, kr. 0: 80.
6. Stig Comét, Matrisräkning, kr. 1: 60.
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2: 40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 1: 40.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 1: 40.

Problemhäften: 1936 à 60 öre; *1943, 1944 och 1945* à 80 öre; med svar och anvisningar. Innehålla matem. o. fysikaliska uppg. i studentex. o. fyllnadsprövningar. Provräkn. i realex. Uppg. i fysik o. i maskin- o. byggnadslära vid praktisk realex.

Problemhäftena för åren 1937—1942 äro slutsålda.

Särtrycken sändas portofritt om inbetalning sker å tidskriftens postgiro 527 55 (skriv rekvisition å girokupongen). Även genom bokhandeln.

Redaktion och expedition: C. E. Blom, Karlbergsvägen 16IV, Stockholm Va. Postgiro 527 55.

Nya exemplar i originalband

ETT URVAL

MATEMATISK LITTERATUR

	Kr.
Bell, E. T. Men of mathematics. Med 30 portr. N. Y. 1937. 614 sid.	13.50
Bieberbach, L. Theorie d. Differentialgleichungen. 3. verbess. Aufl. Berl. 1930. Nytryck N. Y. 1944. 414 sid.	16.90
Bieberbach, L. Lehrbuch d. Funktionentheorie. 4.—2. verbess. Aufl. Med fig. 2 bd. Berl. 1931—34, nytryck N. Y. 1945. 336, 376 sid.	29.25
Courant, R. o. Hilbert, D. Methoden d. mathemat. Physik. 2 bd. Berlin 1931—37, nytryck N. Y. 1943. 1.002 sid.	63.—
Dörrie, H. Vektoren. München 1941, nytryck A. A. 1946. 308 sid.	26.25
Frank, Ph. o. Mises, R. v. D. Differential- u. Integralgleichungen d. Mechanik u. Physik. 2. vermehrte Aufl. 2 bd. Braunschw. 1930—35, nytryck N. Y. 1943. 940, 1130 sid.	123.75
Hausdorff, F. Mengenlehre. 3. Aufl. Berl. 1935, nytryck N. Y. 1944. 272 s.	16.90
Hilbert, D. o. Cohn-Vossen, S. Anschauliche Geometrie. Berlin 1932, nytryck N. Y. 1944. 333 sid.	15.75
Hilbert, D. o. Bernays, P. Grundlagen d. Mathematik. 2 bd. Berl. 1934—39, nytryck A. A. 1944. 483, 510 sid.	118.75
Hurwitz, A. o. Courant, R. Funktionentheorie. 3. verbess. Aufl. Berlin 1929, nytryck N. Y. 1944. 546 sid.	33.75
Ince, E. L. Ordinary differential equations. 18 ill. N. Y. 1944. 566 sid.	17.80
Jahnke, E. o. Emde, F. Funktionentafeln mit Formeln u. Kurven. Revid. uppl. N. Y. 1945. 400 sid.	16.90
Kamke, E. Differentialgleichungen. I: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2. Aufl. M. 60 fig. Leipz. 1943, nytryck A. A. 1945. 668 sid.	66.50
Klein, F. Elementary mathematics from an advanced standpoint. Arithmetic, algebra, analysis. Övs. från 3:e tyska uppl. N. Y. 1945. 286 sid.	16.90
Madelung, E., Boehle, K. o. Flügge, S. Die mathemat. Hilfsmittel d. Physikers. 3. verbess. Aufl. Berl. 1936, nytryck N. Y. 1943. 397 sid.	15.75
Mises, R. v. Wahrscheinlichkeitsrechnnug. Leipz.-Wien 1931, nytryck N. Y. 1945. 584 sid.	33.75
Pólya, G. o. Szegö, G. Aufgaben u. Lehrsätze aus d. Analysis. 2 bd. Berl. 1925, nytryck N. Y. 1945. 366, 430 sid.	31.50
Scheffers, G. Lehrbuch d. Mathematik zum Selbstunterricht und für Studierende d. Naturwissenschaften u. d. Technik. 8. Aufl. 438 ill. Berl. 1940, nytryck N. Y. 1945. 751 sid.	29.25
Schoenflies, A. Einführung in d. analyt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes. 2. Aufl. 96 fig. Berl. 1931, nytryck A. A. 1945. 424 sid.	48.75
van der Waerden, B. L. Einführung in d. algebraische Geometrie. 15 ill. Berlin 1939, nytryck N. Y. 1945. 254 sid.	15.75
van der Waerden, B. L. Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen v. E. Artin u. E. Noether. 2. verbess. Aufl. 2 dlr i ett bd. Berl. 1940, nytryck N. Y. 1943. 514 sid.	27.—

G. RÖNNELL **Antikvarisk Bokhandel**
Birger Jarlsg. 32, Tel. 20 21 63 STOCKHOLM

Matematisk och naturvetenskaplig litteratur i lager eller anskaffas snabbast möjligt. Boksamlingar och enstaka böcker av värde köpas.

VERKSTÄDER FÖR FRAMSTÄLLNING AV

LABORATORIEGLAS, MEKANISKA OCH ELEKTRO-MEKANISKA ARBETEN M.M.

Vi inbjuda till ett besök i våra

moderna utställningslokaler

Utställning, fabrik och kontor

MALMSKILLNADSGATAN 48 C

Telefon: 23 37 80 (växel)

Om dubbelförhållanden och hyperbolisk längdmätning.

Av JOH. HAGNE.[1]

Den projektiva geometrien sysselsätter sig ej med de geometriska storheternas mått utan framför allt med deras inbördes lägen och med i vad mån dessa kunna förändras, utan att därvid vissa invarianta egenskaper gå förlorade.[2] Därvid tänker man sig ett system (L) av geometriska element förflyttat eller avbildat efter någon lag (»projicierat») på ett annat system (L'), och den väsentliga förutsättning som då göres är, att mot varje element av L svarar ett element av L' och omvänt. Exempel: Äro L och L' punktrader (räta linjer) i ett plan, kunna deras element tillordnas varandra exempelvis genom att man förenar en godtycklig punkt A av L med en fix punkt O i planet och låter skärningspunkten A' mellan OA och L' vara den mot A svarande bilden. — Eller: Om L och L' äro två plana strålknippen, kan en stråle A ur L tillordnas den stråle A' ur L', som skär en fix rät linje i planet i samma punkt som strålen A.

Om man nu önskar införa en metrik i de betraktade systemen, bör denna vara sådan, att det mot vissa utplockade element ur L svarande måttet är det samma som måttet för motsvarande element ur L'; måttet skall alltså vara invariant vid avbildningen av L på L'. Att en sådan metrik kan införas axiomatiskt, har visats av F. SCHUR,[3] vars resultat är, att måttsbegreppet måste anknytas till begreppet dubbelförhållande. En projektiv *sträcka* bestämmes därför ej av två utan av fyra (i rät linje belägna) punkter, A, B, C, D; fixeras tre punkter, U, O och E, på L (»oändlighets-», »noll-» resp. »enhetspunkten») och betecknar (OA) den av U, O,

[1] Manuskriptet har för publiceringen i Elementa omarbetats av fil. lic. STIG COMÉT, med förf.-s gillande.

[2] En grundläggande, syntetisk behandling av den projektiva geometrien ges i C. E. SJÖSTEDT, Projektiv geometri. Stockholm (1946). Rec. i detta häfte, s. 000.

[3] FRIEDRICH SCHUR, Über die Grundlagen der Geometrie. Mathematische Annalen 55 (1901), s. 265—292.

E, A bestämda sträckan, anges sträckan A, B, C, D av dubbelförhållandet

$$(A, B, C, D) = \frac{(OD) - (OB)}{(OD) - (OA)} : \frac{(OC) - (OB)}{(OC) - (OA)}. \tag{1}$$

Är i stället L ett strålknippe, anger (1) den av strålarna A, B, C, D bestämda projektiva *vinkeln* (som alltså har fyra »vinkelben»).

Projektiva avbildningar låta sig med fördel behandlas analytiskt. Om därvid en punkt i planet anges av sina homogena koordinater $(X; Y; Z)$ — de vanliga koordinaterna äro då som bekant $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$ —, blir uttrycket för att punktraderna L och L' äro omvändbart entydigt avbildade på varandra

$$\left.\begin{aligned} X' &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z \\ Y' &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z \\ Z' &= a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

där determinanten av de konstanta koefficienterna a_{jk} är skild från noll. Analogt, om L och L' äro strålknippen, varvid $(X; Y; Z)$ få beteckna en stråles linjekoordinater (»koefficienterna i linjens ekvation»). Emellertid är man ej bunden vid att låta bokstäverna beteckna reella tal. I själva verket visar det sig vara ytterst givande att tillåta även icke-reella värden på koordinater o. dyl. men att likväl behålla namnen »punkt», »rät linje» etc.[1] Räkningarna, som bli utförbara i en helt annan utsträckning inom det komplexa talområdet, ge nämligen en rad resultat inom det reella, och dessa ha därefter en omedelbar geometrisk innebörd. Sålunda visade redan Laguerre,[2] hur det vanliga euklidiska vinkelmåttet står i samband med ett dubbelförhållande (såsom (1)), bildat av de två vanliga vinkelbenens vinkelkoefficienter samt de imaginära vinkelkoefficienterna i och $-i$. En sträckas längd behandlades av Cayley,[3] som även leddes fram till dubbelförhållanden. F. Klein[4] har på grundval härav utvecklat metriken för icke-euklidisk geometri och även bl. a. utrett skälet till att det euklidiska av-

[1] Se t. ex. E. Duporcq, Premiers principes de géométrie moderne. Gauthier-Villars, Paris (1938).

[2] Edm. Laguerre, Sur la théorie des foyers. Nouvelles Annales de Mathématiques (1853). Finnes i Oeuvres de Laguerre, tome 2, Paris (1905), s. 6—15; se s. 9.

[3] Arthur Cayley, A sixth memoir upon quantics. Philosophical Transactions, Royal Society, London *149* (1859), s. 61—90; särsk. s. 82 o. följ.

[4] Felix Klein, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Mathematische Annalen *4* (1871), s. 573—625.

ståndet mellan två punkter ej omedelbart kan definieras medelst dubbelförhållanden.

I denna uppsats skall visas, hur längdmätning i en (reell) hyperbolisk geometri kan verkställas medelst verkliga konstruktioner. Som förberedelse lämnas nu närmast en kort framställning av erforderliga allmänna satser.

Några satser ur projektiv geometri.

1. Låt x (i allmänhet komplext) vara ett tal ur en talmängd L och x' ett tal ur L'. Ett omvändbart entydigt, algebraiskt samband mellan x och x' måste vara av första graden, alltså

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{3}$$

och den härigenom bestämda avbildningen av L på L' kallas projektivisk. Sambandet med det föregående blir klart, om vi uppfatta x som en icke-homogen koordinat för en punkt, likaså x'. Avbildningen är given i och med att de *tre* förhållandena $a : b : c : d$ äro kända. Äro dessa ej kända, kunna de bestämmas, om man uppger *tre* x-värden, x_1, x_2, x_3, och de däremot svarande x'-värdena, x_1', x_2', x_3'.

Dubbelförhållandet (i det följande förkortat till DF) till fyra tal, x_1, x_2, x_3, x_4, definieras som (jfr (1))

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Antag nu, att x_1, x_2, x_3 motsvaras av x_1', x_2', x_3' vid en given projektivitet. Genom ekvationen

$$(x_1, x_2, x_3, x) = (x_1', x_2', x_3', x'), \tag{4}$$

som är av första graden, bestämmes ett projektiviskt samband mellan variablerna x och x'. Denna projektivitet måste emellertid vara densamma som den givna, ty enligt ekv. (4) svarar mot $x = x_1$, x_2 eller x_3 just $x' = x_1'$, x_2' resp. x_3'. Härav framgår den grundläggande satsen:

Vid ett projektiviskt samband mellan variablerna x och x' är DF till fyra godtyckliga x-värden lika med DF till motsvarande x'-värden.

2. En »punkt i planet» bestämmes av två (komplexa) tal $(x; y)$ eller ofta bättre av förhållandena mellan tre $(X; Y; Z)$. En homogen ekvation mellan de sistnämnda säges bestämma en linje i planet; speciellt är

$$aX + bY + cZ = 0 \tag{5}$$

ekv. för en rät linje och

$$X^2 + Y^2 = r^2 Z^2 \tag{6}$$

ekv. för en cirkel kring origo med radien r.

Cirkeln skär oändlighetslinjen, $Z = 0$, för $Y = \pm iX$, dvs. i punkterna (1; i; 0) och (1; $-i$; 0), oberoende av r. Dessa punkter, I och J, planets s. k. cykliska punkter, spela en fundamental roll inom projektiv geometri, så även i denna uppsats.

Som synes genom insättning i (5) har varje rät linje, som går genom I en vinkelkoefficient (denna def. som $-\frac{a}{b}$) $= i$ och varje rät linje genom J en vinkelkoefficient $= -i$. Även de härigenom bestämda »riktningarna», planets isotropa riktningar, äro av stor betydelse.

3. Genom projektiv transformation enligt (2) ändras ej gradtalet för en kurvas ekvation, men i övrigt kunna därvid stora förändringar åstadkommas. Genom att förfoga över transformationskoefficienterna a_{jk} kan man ofta transformera en given kurvas ekv. till lämpligare form eller givna punkter till lämpligare lägen. Så kan man exempelvis föreskriva att fyra givna punkter, $(X_j; Y_j; Z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, skola avbildas på fyra andra givna punkter, $(X_j'; Y_j'; Z_j')$, ty detta ger åtta ekvationer (varje j ger två ekv., näml. kvoterna mellan de tre likheterna (2)), vilket i allmänhet räcker för bestämning av de åtta förhållandena mellan de nio a_{jk}.

Man kan också önska avbilda cirkeln (6) på sig själv på sådant sätt, att punkterna I och J motsvaras av två givna punkter $(X_1'; Y_1'; Z_1')$ resp. $(X_2'; Y_2'; Z_2')$ på cirkeln. En enkel uträkning ger i detta fall resultatet (bortsett från en faktor, $\neq 0$):

$$\left.\begin{aligned} X' &= (X'_1 + X'_2)X + i(X'_1 - X'_2)Y + \frac{r^2}{\varrho}(Y'_2Z'_1 - Y'_1Z'_2)Z \\ Y' &= (Y'_1 + Y'_2)X + i(Y'_1 - Y'_2)Y + \frac{r^2}{\varrho}(X'_1Z'_2 - X'_2Z'_1)Z \\ Z' &= (Z'_1 + Z'_2)X + i(Z'_1 - Z'_2)Y + \frac{1}{\varrho}(X'_1Y'_2 - X'_2Y'_1)Z \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

där $$2\varrho^2 = X'_1X'_2 + Y'_1Y'_2 - r^2Z'_1Z'_2.$$

4. DF till fyra punkter, belägna på en rät linje, som kan antagas icke vara »parallell med y-axeln» (dvs. $b \neq 0$ i ekv. (5)), definieras som DF till deras *icke*-homogena x-koordinater; detta DF är f. ö., om även $a \neq 0$, lika med DF till de icke-homogena y-koordinaterna, enl. satsen i mom. 1.

Om fyra genom en punkt gående strålar skäras av en rät linje, är DF till de därvid uppkommande fyra skärningspunkterna lika med DF till strålarnas vinkelkoefficienter.

Bevis: Låt $(x_0; y_0)$ vara strålknippets skärningspunkt och $y = k_0x + l_0$ ekvationen för den skärande räta linjen. En stråle genom $(x_0; y_0)$ och en rörlig punkt $(x; k_0x + l_0)$ på linjen har vinkelkoefficienten

$$k = \frac{k_0x + l_0 - y_0}{x - x_0}.$$

Mellan k och x råder alltså ett projektiviskt samband såsom (3), och enligt satsen i mom. 1 är således DF till fyra k-värden lika med DF till motsvarande x-värden, v. s. b.

Det nämnda DF kallas de fyra strålarnas DF.

5. Om man nu till två tal (koordinater eller vinkelkoefficienter) vill anknyta ett *mått* (sträckans eller vinkelns storlek), måste man för detta uppställa följande enkla villkor: Om sträckan förskjutes i sin egen riktning (resp. vinkeln vrider sig kring sin spets) med bibehållet mått, skall mot varje läge av den ena ändpunkten (vinkelbenet) svara ett och endast ett läge av den andra. Detta betyder, att de nämnda talen, x och x', skola vara knutna till varandra genom ett visst samband av formen (3). Måttet skall ej ändras vid projektivt variabelbyte, varför det bör anknyta till DF. För att bilda ett DF måste man utom x och x' äga ytterligare två tal r och s ($r \neq s$), fixerade så, att $(x, x', r, s) = p$ oberoende av x. Men detta betyder, att

$$(s - x')(r - x) = p(s - x)(r - x'),$$

varav framgår, att för $x = r$ och $x = s$ blir även $x' = r$ resp. $x' = s$. Talen r och s äro alltså rötterna till ekv. (3), om x' däri sättes $= x$. Omvänt: Äro r och s dessa rötter, är säkert (x, x', r, s) oberoende av x. Ty enl. satsen i mom. 1 är (emedan $r' = r$, $s' = s$) $(x_1, x_2, r, s) = (x_1', x_2', r, s)$, varav omedelbart framgår att $(x_1, x_1', r, s) = (x_2, x_2', r, s)$, v. s. b.

Om det vanliga euklidiska måttet $(x' - x)$ på en sträckas längd underkastas denna behandling, finner man $r = s$, varför $(x, x', r, s) = 1$; ifrågavarande mått kan därför ej definieras medelst DF. I uppsatsens senare del skall emellertid en metrik definieras, varur den euklidiska framgår genom limesövergång.

Annorlunda ligger saken till vid vinklar. Den vanliga euklidiska vinkeln v mellan riktningarna k och k' (reella tal) bestämmes ur

$$(1 + kk') \cdot \operatorname{tg} v = k - k'.$$

I denna ekv., som är av formen (3), sättes enligt ovan $k' = k$, varav $k = \pm i$ (planets isotropa riktningar, se mom. 2) erhålles, motsvarande r och s härovan. Om $k = \operatorname{tg} u$, $k' = \operatorname{tg} u'$, blir (oberoende av k)

$$(k, k', i, -i) = \frac{(-i-k')(i-k)}{(-i-k)(i-k')} =$$

$$= \frac{(\sin u' + i\cos u')(\sin u - i\cos u)}{(\sin u + i\cos u)(\sin u' - i\cos u')} = \frac{e^{i(u-u')}}{e^{i(u'-u)}} = e^{2i(u-u')} = e^{2iv}.$$

Härav fås (LAGUERRE, *loc. cit.*)

$$v = \frac{1}{2i}\log(k, k', i, -i). \tag{8}$$

Denna formel, som nu bevisats för reella k och k', kan för komplexa värden tagas som definition på måttet av en vinkel.

6. Slutligen skall här visas, att satsen om periferivinklar på samma båge i en cirkel även gäller allmänt (komplexa tal), om vinkelns storlek definieras enligt (8). Låt fördenskull $(x_1; y_1)$ och $(x_2; y_2)$ vara två fixa och $(x; y)$ en rörlig punkt på cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$; periferivinkelns ben ha då vinkelkoefficienterna $k_j = \dfrac{y - y_j}{x - x_j}$ $(j = 1, 2)$. För de tre punkterna gäller $(y + ix)(y - -ix) = r^2$, etc., varav följer

$$\frac{k_j - i}{k_j + i} = \frac{(y - ix) - (y_j - ix_j)}{(y + ix) - (y_j + ix_j)} = \frac{-r^2}{(y + ix)(y_j + ix_j)},$$

$$(k_1, k_2, i, -i) = \frac{y_2 + ix_2}{y_1 + ix_1}, \text{ oberoende av } (x; y).$$

Vinkeln $v = \dfrac{1}{2i}\log(k_1, k_2, i, -i)$ är alltså oberoende av $(x; y)$, v. s. b.

Denna sats kan ges en allmännare form: Äro A_1, A_2, A_3, A_4 fyra fixa och P en rörlig punkt på cirkeln (6), k_j vinkelkoefficienten för PA_j, kan enligt mom. 3 cirkeln avbildas på sig själv så, att A_3 och A_4 motsvaras av punkterna I och J. Äro k_1' och k_2' vinkelkoefficienterna för $P'A_1'$ och $P'A_2'$, är alltså $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (k_1', k_2', i, -i)$ (jfr slutet av mom. 2), vilket, enligt vad som nyss visats, är oberoende av läget av P', dvs. även oberoende av läget av P (på cirkeln).

Hyperbolisk längdmätning.

7. En sluten, icke-konkav kurva i det vanliga euklidiska planet innesluter ett område, inom vilket den hyperboliska icke-euklidiska geometriens axiom gälla.[1] Vi välja såsom kurva cirkeln (6), som vi vilja beteckna som *fundamentalcirkeln* (K). För att i den inom K giltiga hyperboliska geometrien införa ett längd-(avstånds-)begrepp, förfara vi enl. HILBERT på följande sätt: De två inom K belägna punkter, P och Q, vilkas avstånd (PQ) sökes, förenas medelst en rät linje, vars skärningspunkter med K betecknas A och B. Därpå definieras

$$(PQ) = c \cdot \log (P, Q, A, B), \tag{9}$$

där c är en på lämpligt sätt vald reell konstant.

Det så definierade *hyperboliska avståndet* mellan P och Q är invariant vid alla projektiva transformationer (2). Vi skola nu visa, på vad sätt sträckan PQ med bibehållen hyperbolisk längd kan förflyttas godtyckligt inom K. Därvid behandla vi först förskjutningar av sträckan längs dess egen riktning, därefter vridningar kring dess ena ändpunkt, och ange också hur konstruktionen kan utföras. En allmän förflyttning sammansättes av dylika delförflyttningar.

8. Till de givna punkterna P och Q äro A och B bestämda enl. föreg. (se fig. 1). Skall nu PQ med bibehållen hyperbolisk längd förskjutas i sin egen riktning så att P faller i en given punkt P', finner man Q' genom följande konstruktion: På K tages en godtycklig punkt R (ej A eller B); RP och RQ skära K dessutom i C resp. D; CP' skär K även i R'; $R'D$ skär AB i

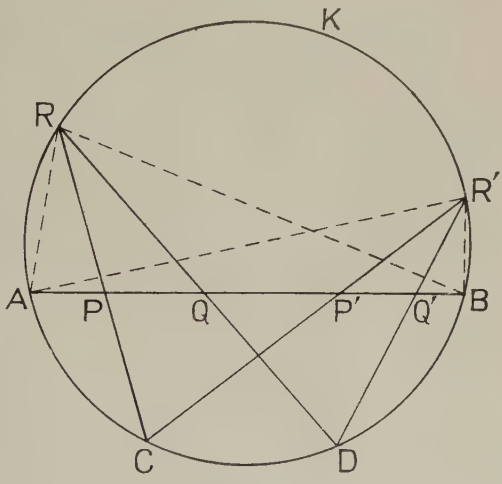


Fig. 1.

[1] D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie. 7. Aufl. (1930). Anhang I (avtryck ur Mathematische Annalen *46*), s. 128. — Se även M. RIESZ, En åskådlig bild av den icke-euklidiska geometrien, Lund (1943), s. 4—5 (»Cayley-Kleins modell»).

en punkt Q'. Påstående: Q' är den sökta, dvs. $(P'Q') = (PQ)$. Bevis: Dubbelförhållandet (P, Q, A, B) är enligt mom. 4 lika med DF till vinkelkoefficienterna för de fyra linjerna RP, RQ, RA, RB, dvs. RC, RD, RA, RB. Men enligt den allmänna satsen i mom. 6 är detta DF lika med DF för de fyra linjerna $R'C$, $R'D$, $R'A$, $R'B$, vilket slutligen är lika med (P', Q', A, B). Alltså är enligt (9) $(PQ) = (P'Q')$.

Av konstruktionen framgår, att ju närmare A eller B sträckan PQ flyttas desto kortare blir dess *euklidiska* längd. Punkterna på periferien av K kunna ej uppnås på annat sätt än genom att låta båda punkterna P' och Q' sammanfalla där. Periferien av K spelar sålunda rollen av det hyperboliska planets oändligt avlägsna punkter. — Detta framgår även av (9), om t. ex. P ligger på K, Q inom K. Då sammanfaller P med endera A eller B, och $(P, Q, A, B) = 0$ eller ∞, varav enligt (9) $(PQ) = \infty$.

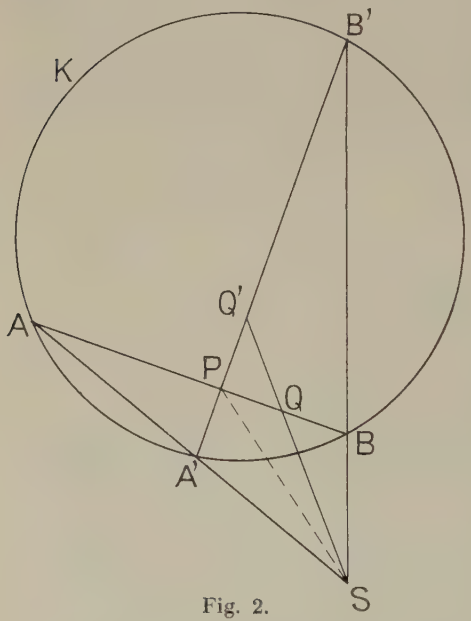


Fig. 2.

9. Skall PQ med bibehållen hyperbolisk längd vridas kring sin ena ändpunkt P, drages genom P den nya riktningslinjen, vars skärningspunkter med K kallas A' och B' (se fig. 2). AA' och BB' skära varandra i S (eventuellt oändligt avlägsen i euklidisk mening). SQ skär $A'B'$ i en punkt Q', som lätt visas vara den sökta. Såväl (P, Q, A, B) som (P, Q', A', B') är nämligen lika med DF för de fyra strålarna SP, SQ, SA, SB, och då de sålunda äro inbördes lika, är enligt (9) $(PQ) = (PQ')$.

10. Även inom den del av det euklidiska planet, som ligger *utanför* K, kunna de angivna konstruktionerna utföras, dock med vissa inskränkningar. Om P och Q båda ligga utanför K, kan (PQ) alltjämt definieras enligt (9). Emellertid kan det ju hända, att PQ ej skär K i reella punkter, och i så fall blir (PQ) imaginär. Be-

tecknas x-koordinaterna för P, Q, A, B med p, q, a, b, blir i detta fall $b = \bar{a}$ (konjugerat komplext till a), om p och q äro reella, och följaktligen

$$(P, Q, A, B) = \frac{(\bar{a} - q)(a - p)}{(\bar{a} - p)(a - q)},$$

som är ett komplext tal med modulen 1, dvs. av formen $e^{i\varphi}$, varav enligt (9) följer att $(PQ) = c \cdot i\varphi$, som är rent imaginärt.

Detta sammanhänger med att den icke-euklidiska geometriens axiom ej alla äro uppfyllda i området utanför K.[1]

Den använda definitionen (9) på hyperboliskt avstånd ger emellertid reella värden, om PQ skär K i två reella punkter, och då kunna de i mom. 8 och 9 angivna konstruktionerna användas. Det bör anmärkas, att om P och Q ligga på var sin sida om K, dvs. om A och B ligga mellan P och Q, bör »sträckan PQ» uppfattas som de delar av linjen genom P och Q, vilka *ej* ligga *mellan* P och Q; sträckan går alltså från P till den euklidiska oändligheten och kommer sedan från andra hållet till Q. De punkter, varav sträckan består, böra nämligen alla ligga inom det betraktade området, alltså utanför K.

11. Förhållandet mellan två givna sträckors hyperboliska längd kan visserligen uträknas enligt (9), men ur principiell (axiomatisk) synpunkt är det av vikt, att man ger begreppet förhållande en innebörd oberoende av mätetal. I själva verket kan Euklides' algoritm tillämpas i det inom K belägna hyperboliska planet, om kontinuitetsaxiomen förutsättas giltiga (vilket endast innebär att dessa axiom förutsättas giltiga i det euklidiska plan, ur vilket K utskär det hyperboliska planet). De två sträckor, som skola jämföras, kunna medelst konstruktionerna i mom. 8 och 9 flyttas så, att de ha ena ändpunkten P gemensam, medan de andra ändpunkterna, Q resp. $\bar{Q}$, ligga i rät linje med P och båda på samma sida om P. Ligger Q mellan P och $\bar{Q}$, är $(PQ) < (P\bar{Q})$. I så fall avsätter man successivt, medelst konstruktionen i mom. 8, sträckan PQ, varvid de uppkomna ändpunkterna betecknas Q_2, Q_3, ... (se fig. 3). Enligt Archimedes' (rättare Eudoxos') axiom finns då heltal n så beskaffade, att $\bar{Q}$ ligger mellan P och Q_{n+1}, dvs. $(PQ_{n+1}) > (P\bar{Q})$. Är n det minsta talet med denna egenskap, är alltså $(PQ_n) \leqq (P\bar{Q})$. Gäller här likhetstecknet, är förhållandet $(P\bar{Q}) : (PQ) = n$. Är däremot $(PQ_n) < (P\bar{Q})$, ligger $\bar{Q}$ mellan Q_n och Q_{n+1}, dvs. $(Q_n\bar{Q}) < (Q_nQ_{n+1})$, som emellertid är lika med

[1] Jfr M. Riesz, *loc. cit.*, s. 70.

(PQ); i så fall upprepas förfarandet genom att sträckan $Q_n\bar{Q}$ avsättes utefter PQ, etc. på vanligt sätt. Finner man så slutligen en sträcka, varav såväl PQ som $P\bar{Q}$ äro heltalsmultipler, är förhållandet mellan dessa rationellt, i annat fall är det irrationellt, och metoden ger, om den avbrytes, närmevärden därav.

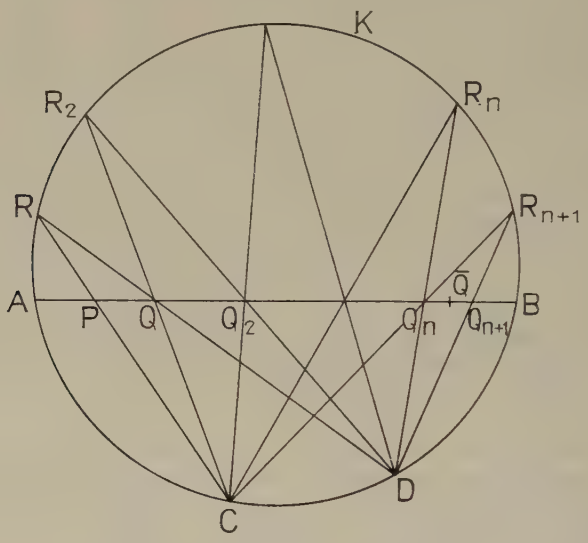


Fig. 3.

12. Att ange en storhets mått är ingenting annat än att ange förhållandet mellan storheten och den valda enheten. Då det gäller den hyperboliska längden av en sträcka, innebär ett fixerande av enheten detsamma som en bestämning av konstanten c i (9). Väljes en sträcka P_0Q_0 till längdenhet, $(P_0Q_0) = 1$, ger (9)

$$c = \frac{1}{\log (P_0, Q_0, A, B)}. \tag{10}$$

Men för att formel (9) skall ge samma värde på förhållandet $(PQ) : (P_0Q_0)$ som den i mom. 11 angivna, direkt på axiomen byggande metoden, måste de av formeln erhållna talvärdena ha egenskapen

$$(PQ) + (QR) = (PR), \tag{11}$$

om P, Q, R ligga i rät linje. Man konstaterar lätt att så är fallet, ty, om $\overline{PQ}$ etc. beteckna vanliga euklidiska sträckor, är produkten av dubbelförhållandena

$$(P, Q, A, B) \cdot (Q, R, A, B) = \frac{\overline{BQ} \cdot \overline{AP}}{\overline{BP} \cdot \overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{BR} \cdot \overline{AQ}}{\overline{BQ} \cdot \overline{AR}} = \frac{\overline{BR} \cdot \overline{AP}}{\overline{BP} \cdot \overline{AR}} = (P, R, A, B);$$

deras logaritmer satisfiera alltså (11). Formel (9) och Euklides' algoritm äro alltså i överensstämmelse med varandra. — Samtidigt har man fått en motivering för att *logaritmen* för DF måste användas.

13. Som längdenhet välja vi nu speciellt den sträcka, vars ändpunkter äro (0; 0) och (a; 0), $0 < a < r$. Enligt (10) blir då $c \cdot \log \frac{r-a}{r+a} = 1$, och om P och Q äro punkter på x-axeln, (x_1; 0) och (x_2; 0), ger (9)

$$(PQ) = \frac{\log \frac{(r-x_2)(r+x_1)}{(r-x_1)(r+x_2)}}{\log \frac{r-a}{r+a}}.$$

Låta vi nu fundamentalcirkelns radie r växa över alla gränser och söka gränsvärdet för ovanstående uttryck, finna vi (emedan $\log(1+\varepsilon) = \varepsilon - \ldots$ för små ε):

$$\lim_{r\to\infty}(PQ) = \lim_{r\to\infty} \frac{-\frac{x_2}{r} + \frac{x_1}{r} + \frac{x_1}{r} - \frac{x_2}{r}}{-\frac{a}{r} - \frac{a}{r}} = \frac{x_2 - x_1}{a},$$

vilket just är det euklidiska måttet av sträckan PQ, mätt med längdenheten a. Den hyperboliska måttbestämningen enligt (9) inom det av K begränsade hyperboliska planet kommer alltså att alltmera närma sig den euklidiska, i den mån K växer och omsluter »allt större del av» det euklidiska planet — åtminstone gäller detta beträffande sträckor riktade längs radien av K. I fråga om annorlunda riktade sträckor ger mom. 14 besked.

14. På en diameter av K, lämpligen x-axeln, tänka vi oss en punkt M (x_0; 0) fixerad, medan en annan punkt P (x; y) rör sig så att hyperboliska avståndet (MP) är konstant (se fig. 4). Orten för P, som visar sig bli ett kägelsnitt, vilja vi kalla för den *hyperboliska cirkeln* kring M med radien (MP). Det är lätt att konstruera fram hur många punkter som helst på den hyperboliska cirkeln; konstruktionen är den som angavs i mom. 9 (fig. 2). Man kan även härleda dess ekvation: Om MP skär K i A' (x_1; y_1) och B' (x_2; y_2), så skall enligt (9), tillämpad exempelvis på y-koordinaterna:

$$(M, P, A', B') = \frac{(y_2 - y)y_1}{y_2(y_1 - y)} = \gamma = \text{konstant.}$$

Då vidare M, P, A', B' ligga i rät linje och A', B' ligga på cirkeln, får man ytterligare ekvationer. Eliminationsresultatet kan, om N

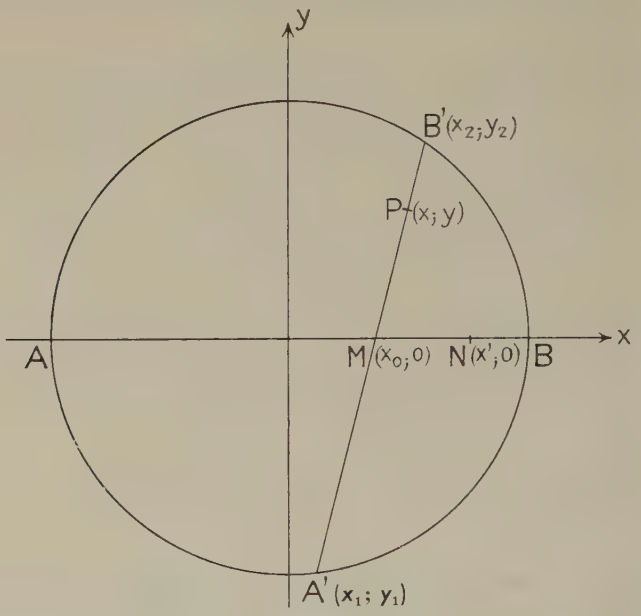


Fig. 4.

$(x'; 0)$ betecknar en av de punkter i vilka den hyperboliska cirkeln skär x-axeln, skrivas

$$r^2(x_0^2 + r^2 - 2x_0x')x^2 + (x_0x' - r^2)^2 y^2 + 2x_0r^2(x'^2 - r^2)x + \\ + x'r^2(2x_0r^2 - x'r^2 - x_0^2x') = 0. \qquad (12)$$

Koefficienten för y^2 är > 0, koefficienten för x^2 har samma tecken som $x_0^2 + r^2 - 2x_0x' = (x' - x_0)^2 + r^2 - x'^2$, vilket är > 0, då M och N ligga inom K. Den hyperboliska cirkeln är alltså, inom K, alltid en ellips. Det torde observeras, att ellipsens medelpunkt i allmänhet ej ligger i M.

Låter man $r \to \infty$ i (12), övergår denna (M och N fixa) till

$$x^2 + y^2 - 2x_0x + 2x_0x' - x'^2 = 0,$$

vilket betyder en cirkel med M till medelpunkt och MN till radie.

Detta innebär, att metriken övergår till euklidisk i alla riktningar, då $r \to \infty$.

15. Slutligen kan man även definiera och konstruera hyperboliska cirklar i området *utanför K*, varvid man lämpligen begränsar sig till sådana med reell radie. Äro M och N som förut två punkter på x-axeln men nu utanför K, blir emellertid den hyperboliska cirkeln kring M med (MN) till radie ej alltid en ellips. Av (12) framgår, att den blir en ellips, parabel eller hyperbel, allteftersom $|x' - x_0| \gtreqless \sqrt{x'^2 - r^2}$, dvs. beroende på om det euklidiska avståndet MN är $>$, $=$ eller $<$ den euklidiska längden av tangenten från N till K.

Volymetrisk bestämning av luftens syrehalt.

Av **LARS-ERIK NORDSTRÖM.**

I mitt enskilda arbete som elev vid Högre allm. läroverket i Kalmar har ingått att undersöka nedanstående metod för bestämning av luftens syrehalt.

I ett mätrör uppsamlas över en lösning av 500 ml konc. ammoniak + 500 ml mättad ammoniumkarbonatlösning den gas, som skall undersökas. Härefter inför man en spiral av tunn koppartråd. Kopparn absorberar då det fria syret under bildning av kopparoxid. Genom att man drar ned spiralen i ammoniaklösningen löses kopparoxiden till tetramminkuprijon. Genom att upprepa detta förfarande, tills ingen oxid längre bildas, kan man fullständigt borttaga syret. Vid användning av ett mätrör på 50 ml tar absorptionen ca 10 min.

Såsom ovan nämnts, använder man vanligen ammoniumkarbonat till lösningen. Genom försök har jag kunnat konstatera, att intet hinder föreligger för användandet av andra ammoniumsalter, t. ex. -klorid, -sulfat eller -nitrat.

Även halten av ammoiak kan i någon mån varieras. Någon bestämd gräns kan icke angivas, men ju lägre koncentrationen är, desto längre tid tar det att lösa upp kopparoxiden.

Vid mina försök med denna metod har jag erhållit de värden, som sammanställts i nedanstående tabell.

Beteckningar: v_1 = ursprunglig volym; v_2 = resterande volym; x = vol-% O_2.

Lösning: 500 ml ammoniak, spec. vikt 0,96, + 500 ml mättad lösning av

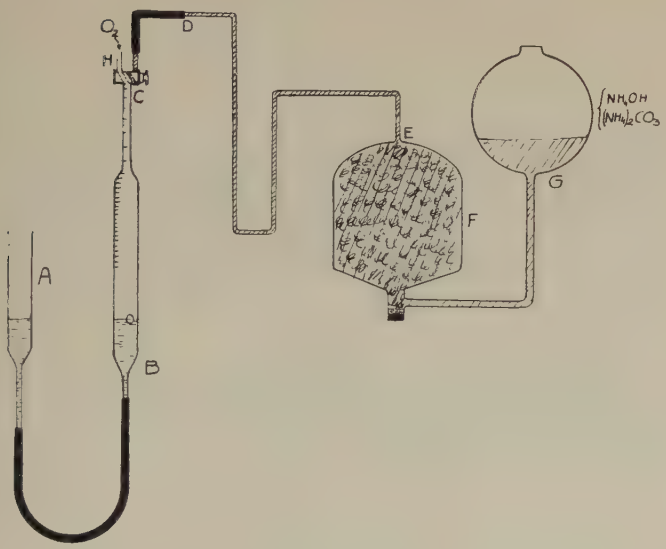
	v_1 ml	v_2 ml	$v_1 - v_2$	x	
Am.-karb.	46,90	37,40	9,50	20,25	
»	46,90	37,00	9,90	21,11	
»	47,90	37,90	10,00	20,88	
»	48,22	38,07	10,15	21,02	Medelvärde: 20,82 vol-%
Am.-sulfat	45,73	36,15	9,58	20,95	
»	47,60	37,65	9,95	20,90	
»	46,85	37,00	9,85	21,03	
»	47,35	37,36	9,99	21,09	Medelvärde: 20,99 vol-%
Am.-klorid	49,00	38,70	10,30	21,02	
»	13,20	10,50	2,70	20,45	
»	48,00	38,15	9,85	20,99	
»	46,50	36,70	9,80	21,07	Medelvärde: 20,88 vol-%
Am.-nitrat	30,50	24,10	6,40	20,90	
»	47,55	37,30	10,25	21,12	
»	46,25	36,52	9,73	21,02	
»	45,30	35,78	9,52	21,01	Medelvärde: 21,01 vol-%

Medelvärde för samtliga försök: 20,93 volymsprocent syrgas i luften. Teoretiska värdet är 20,99 %.

Ovanstående metod för analys av gasblandningar med syre rekommenderas av Prof. Dr Fritz Ullmann i dennes »Enzyklopädie der technischen Chemie», band 10 sid. 32, där den angives vara mera lämplig vid driftsanalyser än de metoder, som basera sig på användandet av pyrogallussyra, fosfor, natriumhyposulfit, ferrotartrat eller krom(II)klorid som absorptionsmedel för syret. Nackdelen med kopparoxid-ammoniakmetoden synes vara, att även koloxid, koldioxid, etylen och acetylen absorberas.

Som exempel på metodens tekniska användning kan anföras en apparat för syrgasanalys, som bl. a. användes vid A/B Nordiska Syrgasverken.

Apparaten användes på följande sätt: Mätröret *BC* fylles först med vatten eller ammoniaklösning från stigglaset *A*, varefter kranen vid *C* tillslutes. Den fria vätskeytan i *A* ställes i jämnhöjd med mätrörets nollstreck. Den gasblandning, som skall analyseras, inblåses nu genom *H*, tills båda vätskeytorna stå vid nollstrecket. Hittills ha absorptionskärlet *F* och kapillärröret *DE* varit fyllda



med ammoniaklösning från stigröret *G*. Nu öppnar man emellertid förbindelsen mellan *C* och *D* samt lyfter samtidigt *A* så, att gasen pressas in i *F*. I samma ögonblick, som vattnet trängt fram genom kapillärröret till *E*, stänges åter *C*. De i *F* befintliga kopparspiralerna absorbera snabbt syret, varvid ammoniaklösningen undan för undan pressas upp mot *E*. När vätskan slutat stiga, öppnas åter förbindelsen mellan mätröret och kapillärröret, samtidigt som *A* sänkes. Härvid suges den kvarvarande gasen in i mätröret och *DE* fylles på nytt med ammoniaklösning. Procenthalten syre i den ursprungliga gasvolymen kan nu direkt avläsas på mätröret.

En olikhet för de in- och omskrivna sfärernas radier i en tetraeder. II.

Av GÖSTA DANIELSSON.

För olikheten [1]

$$R \geqq 3r, \tag{1}$$

som bevisades i föregående uppsats,[2] skall här givas ytterligare ett bevis, byggande på en helt annan tankegång. Vi utgå nu ifrån den i en tidigare uppsats härledda formeln [3]

$$\overline{OT}^2 = R^2 - \frac{1}{16}\sum_{i<j} k_{ij}^2, \tag{2}$$

där T är tyngdpunkten och O omskrivna sfärens medelpunkt för en godtycklig tetraeder, R är den nämnda sfärens radie och k_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ tetraederns kantlängder. Olikheten (1) — där r är den inskrivna sfärens radie, liksom förut — är bevisad, så snart man funnit, att

$$\sum_{i<j} k_{ij}^2 \geqq 144\, r^2, \tag{3}$$

ty då ger (2)

$$R^2 \geqq \frac{1}{16}\sum_{i<j} k_{ij}^2 \geqq 9r^2.$$

Vid beviset av (3) behöva vi den för positiva a_i och p gällande olikheten

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^p \geqq \frac{n^{p+1}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}. \tag{4}$$

Denna erhålles genom upprepad användning av satsen om aritmetiska och geometriska medierna:

[1] Denna olikhet finns i LAISANT, Recueil de problèmes, Paris 1893, upptagen såsom obevisad.
[2] Elementa *29* (juni 1946), s. 95.
[3] Elementa *28* (1945), se s. 138, rad 7.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^p \geq n^p\left(\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\right)^{\frac{p}{n}} \geq \frac{n^{p+1}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p},$$

varav även framgår, att likhetstecknet i (4) gäller, endast om alla a_i äro lika.

Den sträcka, som förenar ett av tetraederns hörn A_i med tyngdpunkten T_i i motstående sidoyta S_i, betecknas med m_i. Då gäller följande relation, som är den tredimensionella motsvarigheten till en känd relation mellan en triangels sidor och medianer:

$$4\sum_{i<j} k_{ij}^2 = 9\sum_{i=1}^{4} m_i^2. \tag{5}$$

Den följer av en allmännare relation, som vi nu skola härleda, då den erbjuder ett visst intresse. Låt (x_i, y_i, z_i) och (x, y, z) vara koordinaterna för A_i resp. en godtycklig punkt P. Då kan man alltid välja α_i så att[1]

$$\sum_1^4 \alpha_i = 1;\ x = \sum_1^4 \alpha_i x_i;\ y = \sum_1^4 \alpha_i y_i;\ z = \sum_1^4 \alpha_i z_i.$$

Då blir

$$\sum_1^4 \alpha_i(x_i - x)^2 = \sum_1^4 \alpha_i x_i^2 - 2x\sum_1^4 \alpha_i x_i + x^2\sum_1^4 \alpha_i = \sum_1^4 \alpha_i x_i^2 - x^2$$

och

$$\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j(x_i - x_j)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{4}\alpha_i\alpha_j(x_i - x_j)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{4}\alpha_i\alpha_j x_i^2 - \sum_{i,\,j=1}^{4}\alpha_i\alpha_j x_i x_j + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{4}\alpha_i\alpha_j x_j^2 =$$

$$= \sum_{i,\,j=1}^{4}\alpha_i\alpha_j x_i^2 - \left(\sum_1^4 \alpha_i x_i\right)^2 = \sum_1^4 \alpha_i x_i^2 - x^2.$$

Alltså

$$\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j(x_i - x_j)^2 = \sum_1^4 \alpha_i(x_i - x)^2.$$

P. s. s. för y- och z-koordinaterna. Genom addition av de tre relationerna framgår den sökta:

[1] Elementa *28*, s. 136 (9).

$$\sum_{i<j} a_i a_j \overline{A_i A_j}^2 = \sum_{1}^{4} a_i \overline{A_i P}^2.$$

Nu är $A_i A_j = k_{ij}$, och om speciellt alla a_i väljas $= \frac{1}{4}$, blir P tetraederns tyngdpunkt T, varför $A_i P = A_i T = \frac{3}{4} m_i$. Därigenom är (5) bevisad.

Betecknar h_i höjden från A_i mot S_i, så är vidare

$$h_i \leqq m_i, \tag{6}$$

där likhetstecknet gäller, endast om h_i och m_i sammanfalla.

Utgående från den lätt insedda formeln

$$\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h_i}$$

erhåller man nu successivt med användande av (4), (6) och (5):

$$\frac{1}{r^2} = \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h_i}\right)^2 \geqq \frac{4^3}{\sum h_i^2} \geqq \frac{4^3}{\sum m_i^2} = \frac{144}{\sum_{i<j} k_{ij}^2}, \tag{7}$$

varigenom (3), och därmed (1), är bevisad.

Om tetraedern är regelbunden, äro alla h_i och m_i lika och $OT = 0$, varför i detta fall överallt i (7) och (1) likhetstecknen gälla. Nu påstås omvänt, att likhetstecknet i (1) gäller, *endast* om tetraedern är regelbunden. I själva verket kunna vi visa, att redan om det *sista* av tecknen $\geqq$ i (7) ersättes med likhetstecken, så måste tetraedern vara regelbunden. På grund av (6) kan nämligen $\sum h_i^2$ vara $= \sum m_i^2$, endast om (6) äro likheter, dvs. om m_i och h_i sammanfalla ($i = 1, 2, 3, 4$). Om då M är mittpunkten av A_3A_4, går planet A_1A_2M genom tyngdpunkterna T_1 och T_2 och följaktligen även genom skärningspunkten T mellan A_1T_1 ($= m_1$) och A_2T_2 ($= m_2$). Då nu m_i samtidigt äro höjder i tetraedern, så är

$A_1T \perp$ planet $A_2A_3A_4$;
$\because$ $A_1T \perp A_3A_4$; p.s.s. $A_2T \perp A_3A_4$;
$\because$ $A_3A_4 \perp$ planet A_1A_2T;
$\because$ $A_3A_4 \perp A_2M$, emedan A_2M ligger i planet A_1A_2T.

I $\triangle A_2A_3A_4$ är alltså en median vinkelrät mot resp. sida. Då detsamma gäller för dess övriga medianer, måste triangeln vara liksidig. Emedan p. s. s. tetraederns övriga sidoytor äro liksidiga trianglar, är följaktligen tetraedern regelbunden.

Elektroniklaboratoriet vid Chalmers tekniska högskola. III.

Av TORSTEN JÖNSSON.

7. Termisk elektronemission från metallfilmkatoder.[1]

I avsnitt 6 behandlades den termiska elektronemissionen från rena metallytor, och där visades, att emissionsströmtätheten (i_s) bestämmes av Richardsons modifierade emissionsformel:

$$i_s = \frac{4\pi k^2 \varepsilon m_0}{h^3} \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{\varepsilon \Phi}{kT}} = AT^2 \cdot e^{-\frac{\varepsilon \Phi}{kT}}. \qquad (16)$$

Emissionen är enligt denna formel endast beroende av det emitterande materialets temperatur T och dess utträdesarbete Φ, eftersom övriga ingående storheter äro universella. Såsom tidigare framhållits, överensstämma de experimentellt erhållna värdena på A inte med det teoretiska värdet 120,4; A har befunnits vara olika för olika material, för några av de viktigaste katodmetallerna precis hälften. Emissionsprocessen måste sålunda vara mera komplicerad än som antagits vid härledningen av formeln. Emellertid spelar osäkerheten härvidlag inte så stor roll, då exponentialfaktorn har mycket större inverkan på i_s än faktorn AT^2.

En metalls emissionsegenskaper ändras avsevärt, om joner eller atomer adsorberas på dess emitterande yta. Detta faktum har väsentlig teknisk betydelse. Genom lämplig beläggning kan man nämligen med betydligt mindre upphettningseffekt få samma emission som från den rena metallen.

Om en *jon* befinner sig i omedelbar närhet av en metallyta, kommer en attraktionskraft, bildkraften (jfr fig. 20, avsn. 6), att verka på den. Jonen kommer att röra sig mot ytan, till dess att de repulsionskrafter, som bli verksamma, då jonens och ytatomernas elektronhöljen tränga in i varandra, just kompensera bildkraften. Överlagringen av bildkraften och repulsionskrafterna ger ett minimum på potentialkurvan, som fastlägger jonens avstånd x_j

[1] Forts. från föreg. häfte, s. 78.

från metallytan (fig. 23). Är jonen envärd, blir den genom adsorptionen frigjorda energien $= -\int_{x_j}^{\infty} -\frac{\varepsilon^2}{4x^2}\,dx = \frac{\varepsilon^2}{4x_j}$.

Beträffande adsorption av *dipoler* har man att skilja mellan *permanenta* och *inducerade* dipoler. Permanenta dipoler kunna endast utgöras av molekyler, inte av atomer. Vid den ostörda atomen sammanfaller nämligen de positiva och negativa laddningarnas tyngdpunkt i atomkärnan, varför dipolbildning inte är möjlig. Av största betydelsen i detta sammanhang äro emellertid de inducerade dipolerna, som uppkomma därigenom att elektronerna i atomhöljet förskjutas genom anläggning av ett elektriskt fält, så att deras tyngdpunkt inte längre faller i kärnan. Dipolmomentet M är proportionellt mot fältstyrkan E, om denna är av måttlig storlek, dvs. $M = \alpha E$. Proportionalitetsfaktorn α kallas atomens polarisationskonstant; den har dimensionen av en volym. (Ex. För Cs är $\alpha = 5 \cdot 10^{-23}$ cm^3, för Cs$^+$ är $\alpha = 2{,}5 \cdot 10^{-24}$ cm^3.)

Om en atom inte är joniserad, och förekommer vidare intet elektriskt fält, som kan inducera en dipol, så kan likväl atomen adsorberas på grund av de mellan normala atomer verksamma *kohesionskrafterna* (van der Waalsska krafterna). Dessas existens kan förklaras sålunda. Genomsnittligt över en längre tid är en atom elektriskt symmetrisk, men till följd av elektronernas rörelse gäller detta inte för en infinitesimal tidrymd, och därför kan atomen utöva en polariserande verkan på en annan atom. Den ena atomens kontinuerligt varierande fält inducerar i den andra atomen en kontinuerligt föränderlig dipol. Växelverkan mellan dessa dipoler resulterar i en permanent attraktion mellan atomerna, fastän dessa genomsnittligt äro var för sig elektriskt fullt symmetriska.

Även för dessa två fall, adsorption av dipoler och adsorption genom inverkan av kohesionskrafter, kan man rita upp potentialkurvor, som visa atomens potentiella energi som funktion av avståndet från metallytan.

Vare sig det är fråga om adsorption av joner eller av dipoler, uppstår ett *dipolskikt* vid metallytan. Detta skikt består i ena fallet av de adsorberade jonerna å ena sidan och de inducerade influensladdningarna i metallen å andra sidan; i andra fallet bildas dipolskiktet av de adsorberade dipolerna själva.

Detta elektriska dubbelskikt ändrar utträdesarbetet för metallen. Det framkallar nämligen enligt elektrostatiken ett potentialsprång av storleken $\Delta\Phi = 300 \cdot 4\pi\sigma M$ volt (σ = ytätheten). Beträffande ad-

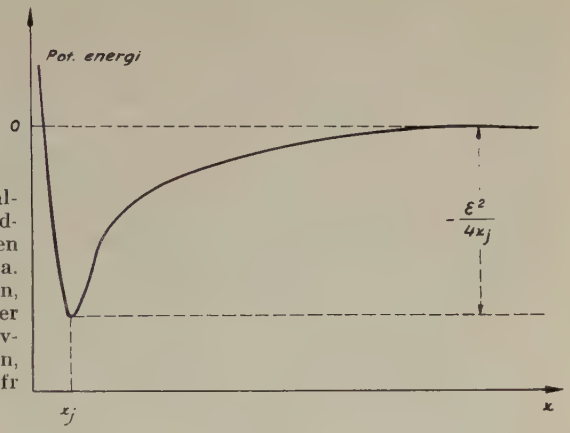


Fig. 23. Potentialkurva, avseende adsorptionen av en jon på en metallyta. Potentiella energien, då jonen befinner sig på oändligt avstånd från ytan, har satts = 0. Jfr fig. 22.

sorption av dipoler fås momentet direkt ur relationen $M = \alpha E$. I fråga om adsorption av joner får man observera, att de av jonerna inducerade laddningarna ligga inuti metallen. Då inga potentialdifferenser kunna förekomma inuti metallen, bli endast de delar av dipolerna verksamma, som ligga utanför metallytan; dessa delar ha längden x_j.

Betecknas utträdesarbetet för den rena metallen med Φ_M och utträdesarbetet för metall + skikt med Φ_{MA}, så är

$$\Phi_{MA} = \Phi_M - 1200\pi\sigma M. \tag{19}$$

Utträdesarbetet minskas, om dipolskiktets positiva pol är riktad utåt från ytan, och ökas, om den negativa polen är riktad utåt.

Vi betrakta nu några metallfilmkatoder med volfram som underlag (kärnmetall). Volfram användes mest, därför att den tål kraftig upphettning och därför lätt kan befrias från icke önskvärda främmande ämnen. Man brukar beteckna metallfilmkatoderna med symbolen M—A, i vilken insättes den kemiska beteckningen på kärnmetallen resp. beläggningsmaterialet.

De första försöken med metallfilmkatoder utfördes i början av 20-talet av Langmuir och medarbetare på *kombinationen W—Cs*. De undersökte emissionen från en volframtråd, som befann sig i ett vakuumrör, vilket innehöll en kvantitet cesium. Denna metall, vars smältpunkt är 26,4° C och kokpunkt 670° C, har vid 30° C ångtrycket $2{,}3 \cdot 10^{-6}$ mm Hg. Vid detta tryck beräknas stöttalet till $4 \cdot 10^{14}$, dvs. varje cm² av tråden träffas av så många cesiumatomer per sekund. En volframyta, som är fullt belagd, har $3{,}56 \cdot 10^{14}$ Cs-atomer/cm², varför tråden täckes med ett monoatomärt lager på

mindre än 1 sek. Vid lägre temperatur kommer tråden att bli helt belagd, vid högre temperatur avdunstar filmen delvis. Den relativa beläggningen bestämmes dels av avdunstningen, som beror av trådens temperatur, och dels av stöttalet, som beror av ångtrycket och därmed av rörets temperatur.

Vid 690° K trådtemperatur och 30° C rörtemperatur observerades en maximal emission av $8{,}8 \cdot 10^{-5}$ amp/cm², medan motsvarande emission för ren volfram i högvakuum beräknas ur emissionsformeln till $3{,}6 \cdot 10^{-26}$ amp/cm². Volframtrådens emission hade alltså genom närvaron av cesiumånga ökats 10^{21} gånger.

Undersöker man emissionens beroende av katodtemperaturen och sätter upp $log\ i_s$ mot $\frac{1}{T}$, får man för tillräckligt låga temperaturer en rät linje i enlighet med Richardsons formel. Vid en viss, av ångtrycket beroende katodtemperatur böjer kurvan av, uppnår sedan ett maximum och faller därefter, tills den övergår i emissionskurvan för ren volfram (fig. 24).

Utträdesarbetet för W—Cs bestämmes ur kurvornas rätlinjiga partier (till höger i fig. 24) till 1,38 volt, dvs. utträdesarbetet är 3,14 volt lägre än för ren volfram, för vilken det är 4,52 volt. Denna minskning kan förklaras genom antagandet, att adsorberade Cs-joner bilda ett dipolskikt på volframytan. Vid högre temperatur bortgå de adsorberade jonerna åter från katoden, vilket medför avvikelse från Richardsons räta linje.

Jonbildningen blir förklarlig, om man observerar, att cesiums joniseringsspänning är 3,88 volt, vilket är 0,64 volt mindre än utträdesarbetet för ren volfram. För jonisering av en cesiumatom, som befinner sig i närheten av volframytan, kräves alltså energien 3,88 elektronvolt. Då den vid jonisationen avsöndrade elektronen inträder i metallen, frigöres 4,52 eV. Joniseringsprocessen ger följaktligen en energivinst på 0,64 eV, varför jonisering är möjlig utan tillförsel av energi utifrån. Om negativ spänning lägges på anoden, fås en ström av positiva joner till den, vilket bevisar, att joner verkligen adsorberats på volframytan.

Av stort intresse är att undersöka hur emissionen beror av beläggningen Θ, dvs. den bråkdel av volframytan, som är belagd med cesium. För detta ändamål renas tråden först genom kraftig upphettning, varefter man tar upp en s. k. aktiveringskurva, dvs. en kurva, som anger emissionen som funktion av tiden. Fig. 25 visar aktiveringskurvor för en serie katodtemperaturer. Vid låga temperaturer (upp till 625° K) uppnås maximal emission efter en viss tid t_m, som är oberoende av katodtemp. Tiden t_m beror av ångtrycket p, och enligt mätningar av I. A. Becker gäller samban-

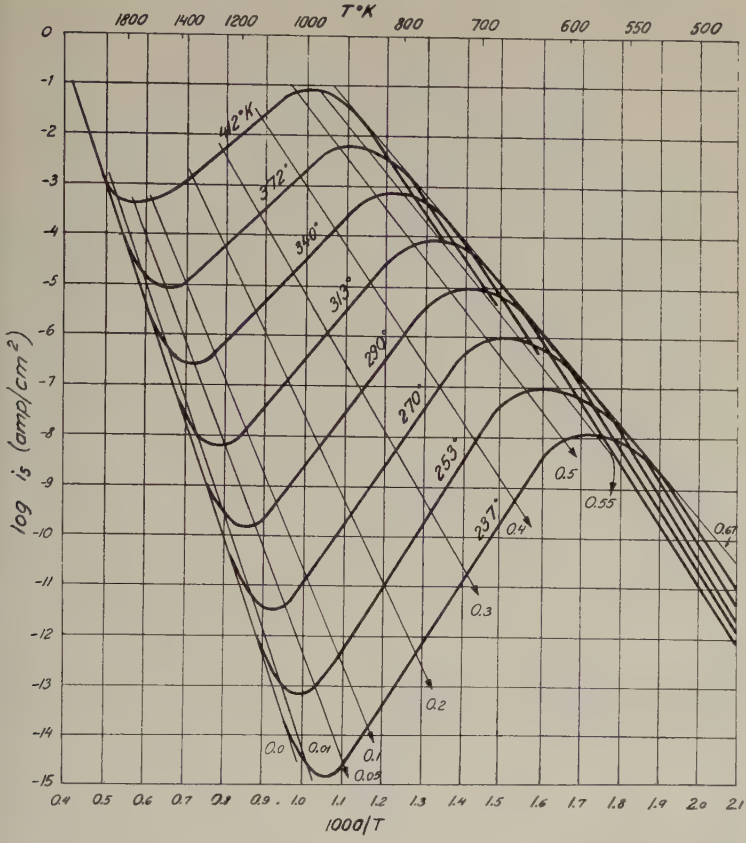


Fig. 24. Elektronemissionen från en W—Cs-katod som funktion av katodtemperaturen. Rörtemperaturen, som bestämmer Cs-ångans tryck, är parameter. De rätliniga kurvdelarna till höger om maximipunkterna representera helt belagd katod, den vänstra räta linjen avser ren volfram, och mittpartierna representera delvis belagd katod. De sneda räta linjerna ange Θ-värdena.

det $p \cdot t_m = \text{konst}$. Eftersom antalet Cs-atomer, som per tidsenhet träffa katoden, är proportionellt mot p, fås tydligen emissionsmaximum oberoende av temperaturen vid en bestämd beläggning Θ_m. För mindre beläggningar gäller

$$\frac{\Theta}{\Theta_m} = \frac{t}{t_m}. \tag{20}$$

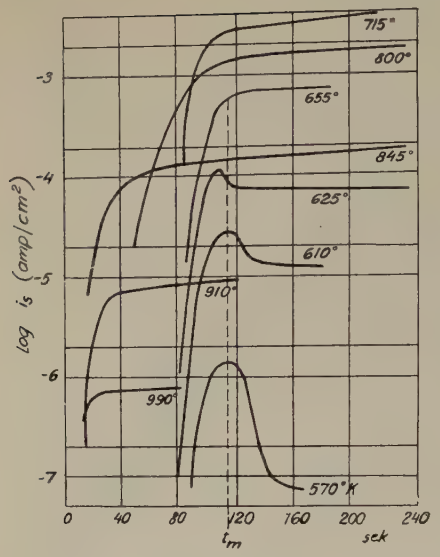


Fig. 25. Aktiveringskurvor för en W—Cs-katod.

Med hjälp av denna relation kan man sätta upp emissionen och följaktligen också minskningen i utträdesarbete som funktion av Θ/Θ_m (fig. 26).

Undersökningar, på vilka här inte skall ingås, visa, att det endast är i början av processen som cesium adsorberas i form av joner; senare är det oladdade cesiumatomer som adsorberas. Man har även kunnat bestämma värdet på Θ_m, som för en W—Cs-katod är = 0,67 (jfr fig. 24). Vid maximal emission är sålunda ca $^2/_3$ av volframytan belagd med cesium.

Den cesierade katoden är ur emissionsekonomisk synpunkt den bästa av alla kända glödkatoder. Då den emellertid endast är verksam vid närvaro av cesiumånga av lågt tryck, begränsas dess användning till mottagarerör. Närvaron av ånga medför, att cesiumkatoden endast kan användas i rör för låga spänningar. En olägenhet är att rörets data påverkas av omgivningens temperatur, eftersom denna ju bestämmer ångtrycket. En ytterligare nackdel är, att katoden mycket lätt förstöres genom för hög glödspänning (beläggningen avdestillerar).

Användningen av cesium i vakuumrör fordrar en speciell teknik vid tillverkningen. Metallisk cesium kan till följd av sin kemiska aggressivitet inte hanteras i luft. Den måste framställas i vakuum, vilket sker så, att man upphettar en blandning av cesiumklorid och kalciumspån i ett hårdglasrör, som

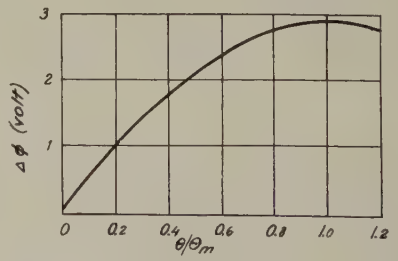


Fig. 26. Minskningen i utträdesarbete $\Delta\Phi$ som funktion av beläggningsförhållandet Θ/Θ_m för en W—Cs-katod.

är påsmält elektronröret. Härvid frigöres cesium, som destillerar över. Laboratoriemässigt är det tämligen enkelt att framställa elektronrör med metall-cesium-katod, och därför höra dessa katoder till de tidigast och bäst undersökta.

I förbigående sagt är cesium ett mycket använt beläggningsmaterial för kalla katoder för fotoceller och sekundäremissionsrör. Vanligen användes för sådana ändamål annan kärnmetall än volfram (silver, platina, nickel).

W—Ba-katoden, som erhålles genom att man ångar barium från en i det evakuerade röret befintlig tablett på en i förväg väl renad volframtråd, uppvisar väsentligen samma emissionsegenskaper som kombinationen W—Cs. Värdet på Θ_m är 0,29. Man har konstaterat, att barium adsorberas i form av 2-värda joner.

Den tekniskt viktigaste metallfilmglödkatoden är *kombinationen W—Th.* S. k. *torierad volfram* innehåller 0,7—2 % toriumoxid. Den uppvisar fördelaktigare rekristallisationsegenskaper än ren volfram, varför den tidigt kom till användning inom glödlampsindustrien. Glödtrådar för emissionsändamål bruka innehålla 1—1,5 % ThO_2. Då glödtråden upphettas till hög temperatur i högvakuum, reduceras den inneslutna toriumoxiden av volfram till ren torium. Denna tränger ut till ytan och åstadkommer där ett Φ-minskande dipolskikt.

De torierade glödtrådarnas betydelse består däri, att de s. a. s. regenerera sig själva. Torium, som avdustar från katodytan, ersättes ständigt genom diffusion[1] från metallens inre, förutsatt att driftstemperaturen är sådan, att avdunstning och diffusion balansera varandra. En motsvarande process är inte möjlig vid kombinationerna W—Cs och W—Ba. Vidare behöver man inte räkna med den instabilitet i emissionen, som utmärker W—Cs- och W—Ba-katoderna och som sammanhänger med ångtryckets beroende av rörtemperaturen. I övrigt är emissionsmekanismen densamma som för W—Cs- och W—Ba-kombinationerna. Emissionen uppnår sitt maximum, då katodytan är fullständigt belagd med ett monoatomärt skikt torium ($\Theta_m = 1$). Antalet Th-atomer per cm^2 är då $7{,}56 \cdot 10^{14}$, dvs. lika många som antalet W-atomer i ytan.

Följande tabell visar exempel på aktiverings-(formerings-) schema för en torierad volframkatod. Det förutsättes, att själva glasröret är urgasat i förväg på tidigare beskrivet sätt.

[1] Enligt en äldre uppfattning, lanserad av LANGMUIR, skulle den process, varigenom toriummetallen trängt ut till ytan, vara en diffusion. Elektronmikroskopiska undersökningar ha visat, att så inte är förhållandet. Emellertid använder förf. »diffusion» i brist på bättre benämning.

Tab. 3. Aktiveringsschema för torierade volframkatoder.

	Operation	Katodtemp. °K	Tid	Anm.
1	Urgasning	2000	5 min	Utan anodspänning
2	Reduktion av ThO_2	2600—2800	30 sek	» »
3	Gettring med Mg eller Ba	Rumstemp.	—	» »
4	Avsmältning av röret från pumpen	»	—	» »
5	Aktivering (Th diffunderar ut)	1900—2100	tills Th-filmen fullst. utbildats	» »
6	Åldring	1800—1900	1—6 tim	Med »
7	Provning	1500	—	Med mättn.spänning; i_s skall vara ca 20 mA/cm²
8	Normal belastning	1600—1800	1000—3000 tim	Driftsspänning

I temperaturintervallet 2300—2600° K är förångningen av toriumfilmen snabbare än ersättningen från metallens inre, varför detta område måste undvikas vid aktiveringen. Den för aktiveringsupphettningen erforderliga tiden (punkt 5 i schemat) varierar med tråddiametern och toriumhalten i tråden och måste därför utrönas experimentellt. Man förfar härvid så, att man avbryter processen efter 1 minut, sänker katodtemperaturen till 1500° K och mäter mättningsströmen genom att lägga på anoden en tillräckligt hög spänning. Därefter upphettas katoden ytterligare 1 minut vid 1900—2100° K, varefter en ny emissionsmätning göres vid 1500° K. Detta förfarande upprepas, till dess att ingen ökning i emissionen mer uppträder. Summan av dessa enskilda aktiveringstider ger den för katoden i fråga erforderliga totala aktiveringstiden. Sambandet mellan emission resp. utträdesarbete och beläggning framgår av fig. 27.

Om en torierad katod har förlorat sin emissionsförmåga, kan detta bero på att »förrådet» av reducerad torium inuti metallen har tagit slut. Man kan då ofta göra röret brukbart igen genom att behandla det enligt punkterna 1, 2, 5 och 6 i schemat.

Ofta tillsätter man 0,25—1,5 % kol till volfram-toriummaterialet, enär kol främjar reduktionen av toriumoxiden. Man kan också

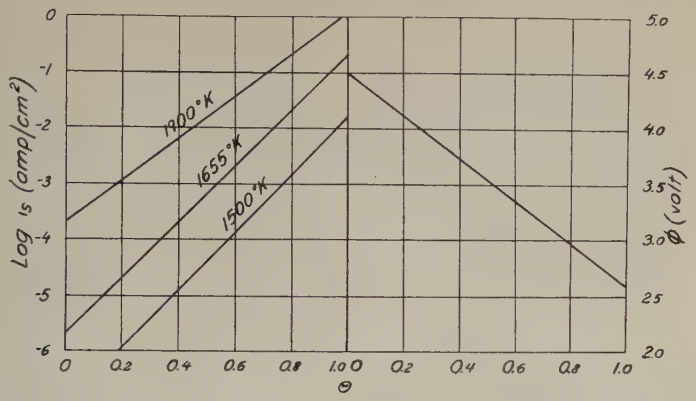


Fig. 27. Sambandet mellan emission resp. utträdesarbete och beläggning för W—Th-katod.

göra så, att man före reduktionen (punkt 2 i schemat) karboniserar glödtråden, dvs. glödgar den ett ögonblick i kolväteatmosfär (bensin, naftalin, acetylen). Härvid bildas på volframytan ett grovkristalliniskt skikt volframkarbid. Från detta skikt avdunstar den monoatomära toriumfilmen mindre snabbt än från en ren volframyta, och dessutom nedsättes diffusionen av torium från metallens inre. Sådana kolbehandlade toriumfilmkatoder ha en livslängd på ca 3000 timmar vid en driftstemp. av 1950°K.

Om man inte har tillgång till eller kan framställa torierad volframtråd, kan man göra toriumfilmkatoder på följande sätt. Man tillverkar en pasta enligt följande recept. Vid 80°C löses dels 5 g rent toriumnitrat i 10 cm³ destillerat vatten och dels 1 g borax i 4 cm³ vatten. Dessa lösningar blandas, och blandningen hålles vid 80—90°C, tills den blir fullkomligt klar. Blandningen strykes med pensel vid 50°C på den färdigmonterade volframtråden. Efter utkristallisering göres ny påstrykning. Detta upprepas flera gånger.

En toriumfilmkatod är ytterst känslig för rester av gaser och ångor i röret, i synnerhet för även de minsta spår av syre. Kvicksilverånga och ädelgaser inverka inte på emissionen direkt, men vid anodspänningar över 20—25 volt förstöres toriumfilmen genom jonbombardemang.

Toriumfilmkatoder användas huvudsakligen i mindre mätrör (för ca 1300°K katodtemperatur) samt i sändarerör för upp till flera kW växelströmseffekt.

Inverkan av syre. Utsättes en volframglödtråd för syrgasatmosfär, fås en *W -O-katod.* Syre bildar företrädesvis negativa joner,

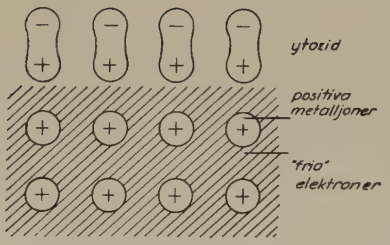


Fig. 28. Bildning av ytoxid på en metallyta.

varför man får ett dipolskikt med dipolmomentet riktat motsatt mot i de förut betraktade fallen. Metallens utträdesarbete ökas (vid monoatomärt skikt är det 9,5 volt), emissionen blir mindre, och man säger därför, att syre förgiftar volframkatoden. Enligt undersökningar av DE BOER och medarbetare sker adsorptionen av syre på så sätt, att en s. k. ytoxid bildas. Denna består av ett monomolekulärt skikt av metalloxidmolekyler; dessa bilda permanenta dipoler, vilkas negativa ändar vetta utåt från ytan (fig. 28).

Om man vid försöket med Cs-ånga (s. 31) först utsätter volframglödtråden för syrgasatmosfär, får man en betydligt större emission än från en W—Cs-katod (fig. 29). Genom adsorption av syre och

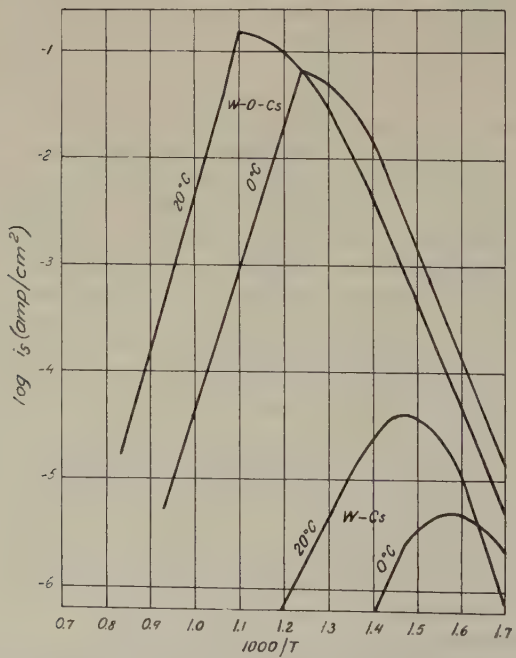


Fig. 29. Emissionen från en W—O—Cs-katod och en W—Cs-katod vid ett par olika temperaturer.

cesium i nämnd ordning på volfram får man sålunda en katod med lägre utträdesarbete än W—Cs har. Denna katod bör betecknas *W—O—Cs*. Liknande egenskaper uppvisar W—O—Ba-katoden.

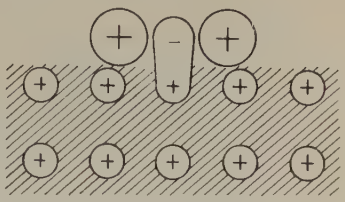


Fig. 30. Cesiumjoner och volframoxidmolekyler på ytan av en W—O—Cs-katod.

W—O—Cs-katodens emissionsegenskaper förklarar DE BOER på följande sätt. Cesiumjonerna lagras bredvid metalloxiddipolerna i enlighet med den schematiska fig. 30 och bli fastare bundna än på W—Cs-katodens rena metallyta. Adsorptionsenergien blir större, och flera Cs-joner än vid ren metallyta kunna adsorberas, varigenom utträdesarbetet i motsvarande grad minskas. Till följd av den starkare bindningen blir också avdunstningen mindre, varför högre temperaturer kunna användas utan fara för beläggningen. Vid 30° C rörtemperatur fås den maximala emissionen vid 1000° K, då den utgör 0,35 amp/cm², som är mer 1000 gånger så mycket som för W—Cs. (Kalla katoder med beläggning av denna typ, fast med annan kärnmetall än volfram, användas mycket i fotoceller.)

Sker adsorptionen i ordningen cesium-syre, har syret en förgiftande verkan; syrejonerna lagras i detta fall över det redan existerande cesiumskiktet, så att det härvid uppstående negativa dipolmomentet ökar W—Cs-kombinationens utträdesarbete. En katod av detta slag betecknas *W—Cs—O*.

Emissionskonstanterna för katoder av det här behandlade slaget äro avsevärt mycket svårare att bestämma än motsvarande storheter för rena metaller. Beläggningen är stabil endast inom ett bestämt temperaturintervall, och dessutom är den inte likformigt fördelad över kärnmetallens yta. Den varierande beläggningen medför olika potentialsprång vid olika ytelement, vilket medför potentialskillnader mellan angränsande element, och dessa ge upphov till elektriska fält utanför ytan, s. k. ytfält, vilka påverka utträdesarbetet. De ur emissionsmätningar erhållna Φ-värdena bli därför ett slags medelvärden. I tab. 4 återges några mätresultat, erhållna medelst olika bestämningsmetoder. Som synes äro A-värdena abnorma.

Elektronmikroskopet i katodforskningens tjänst. Inom elektroniken har katodforskningen sedan länge intagit en framträdande plats. Katoden är ju en viktig detalj i ett elektronrör. Man har på den två huvudkrav, nämligen dels stabil emission och dels

Tab. 4. Emissionskonstanter.

Katod	Φ volt	A amp/(cm. °K)^2
W-Cs	1,5—1,7	—
W-Ba	1,6—2,1	1,5
W-Th	2,6—3,1	3—16
W-O	5—9	—
W-O-Cs	1,4	—
W-O-Ba	1,3	0,18
W-Ba-O	1,9—2,5	—

största möjliga emission med minsta möjliga upphettningseffekt. Att emissionsstabilitet är nödvändig för rörets tillförlitliga funktion inses utan vidare. Vad emissionsekonomien betyder, kan man inse t. ex. genom att jämföra 20-talets radioapparater, som krävde ackumulatorer för glödtrådsupphettningen, med andra världskrigets portabla apparater; ett litet torrbatteri kan i månader försörja samtliga rör i en kombinerad sändare och mottagare av lilleputtformat.

Man upptäckte ganska tidigt, att de belagda katoderna äro fördelaktigare ur emissionssynpunkt än de rena metallkatoderna. Den första oxidkatoden framställdes av Wehnelt 1903, och för ca trettio år sedan började de belagda katoderna få allmän teknisk användning. Under de följande tjugo åren fortgick arbetet på deras förbättring oavlåtligt och lämnade utmärkta resultat, fastän forskningsverksamheten var ytterst mödosam; den hade närmast karaktären av testning. Man hade nämligen ingen möjlighet att studera, vad som hände på själva katodytan under emissionsprocessen.

För något mer än tio år sedan länkades katodforskningen in i nya banor genom uppfinningen av elektronmikroskopet. Om katoden, som man vill undersöka, får tjänstgöra både som elektronkälla och som objekt i mikroskopet (emissionselektronmikroskop), får man i bildplanet en förstorad bild med ljusa och mörka partier, svarande mot katodelement med starkare och svagare emission. Man kan i vissa fall också urskilja kärnmetallens kristallstruktur i bilden.

Vi skola med hjälp av några bilder, upptagna redan 1935 vid AEG:s forskningsinstitut, ge en antydan om vad elektronmikroskopet avslöjar om den torierade volframkatoden.

Vid upphettning av ett torierat volframband (fig. 31) bildas först punktformiga emissionscentra, vilka vid förhöjd temperatur övergå i ringar, som vidga sig och vandra över katodytan (a). Dessa ringar begränsa områden med svagare emission. Vid högre temperatur ökas dessa områdens emission (b). De vandrande ringarna observeras redan vid 1600° K; de kunna därför inte ha någonting att göra med torium, som smälter först vid 2000° K. Fenomenet

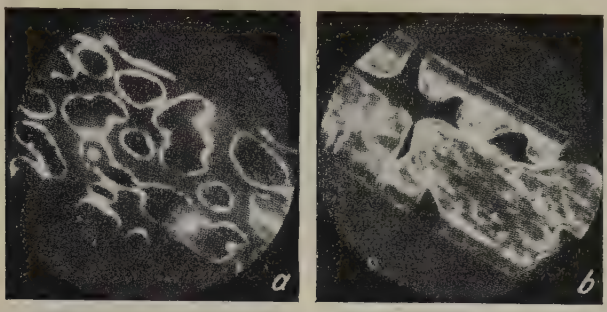


Fig. 31. Urgasning av torierad volfram. Förstoring: 10.

uppträder inte vid väl urglödgad tråd, men däremot observeras det vid urgasning av icke torierad volfram. Emissionen måste sålunda tillskrivas föroreningar; de kraftigt emitterande ringarna representera monoatomära skikt.

Fig. 32 visar nästa stadium i aktiveringsprocessen. Katoden upphettas till 2800° K, varigenom alla föroreningar försvinna och toriumoxiden delvis reduceras. Torium börjar tränga ut till ytan men inte likformigt utan punktvis. Dessa punkter äro kraftigt emitterande.

Vid fortsatt aktivering bli punkterna till fläckar, som breda ut sig, tills hela ytan emitterar starkt (fig. 33—34).

Det är de ursprungliga emissionscentra som under hela aktiveringsprocessen tjänstgöra som utströmningsöppningar. Om katoden avaktiveras och sedan reaktiveras, uppträda emissionscentra märkvärdigt nog inte på samma ställen som första gången. Utströmningsöppningarna ligga inte alla, som man skulle vänta, i

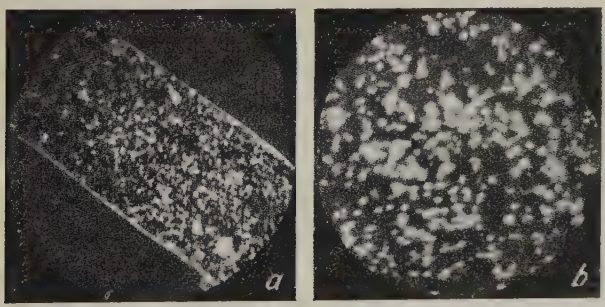


Fig. 32. Katodens utseende efter reduktionen av toriumoxiden. Först.: a) 10; b) 25.

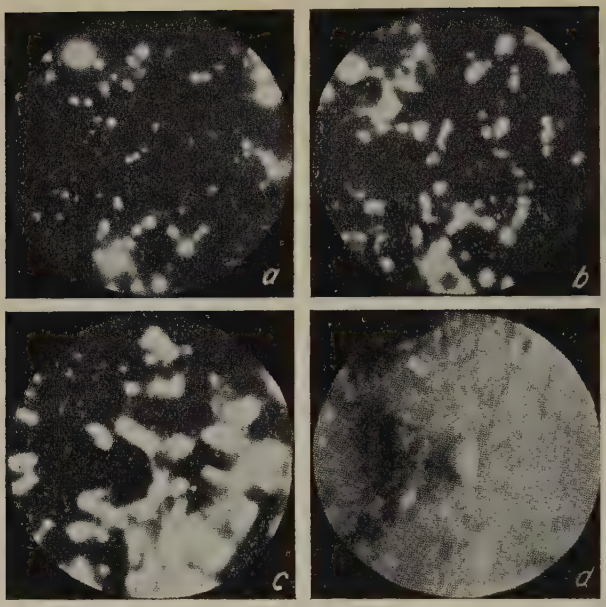


Fig. 33. Aktivering vid 2000° K i 60 min. Först.: 25.

gränserna mellan volframmikrokristallerna, utan utströmning sker även i stor utsträckning genom något slags porer i själva kristallitytorna.

Vid den tid, då de här reproducerade bilderna upptogos, var emissionselektronmikroskopet ofullkomligt. Det tillät inte avbildning av starkt emitterande objekt, varför man före en upptagning fick temporärt sänka katodtemperaturen. Man kunde sålunda inte

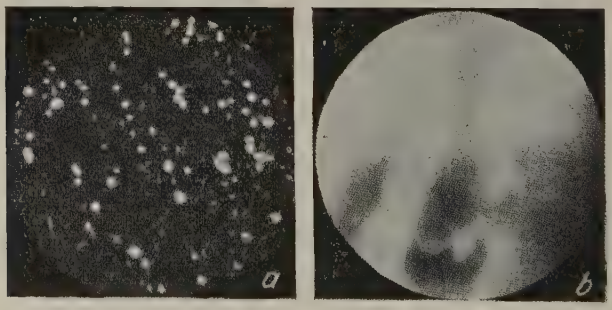


Fig. 34. Aktivering vid 2350° K i 2 min. Först.: 25.

följa aktiveringsprocessen kontinuerligt. Numera äro dessa svårigheter bemästrade. Man kan nu filma hela förloppet, och man kan uppnå förstoringar på några tusen gånger. Härigenom har man kunnat komma en god bit på väg beträffande förståelsen av en annan viktig klass av belagda katoder, nämligen oxidkatoderna. Det är särskilt angeläget att komma till klarhet om dessas tidigare så gåtfulla fysik, då de höra till de mest använda. Årligen tillverkas några hundra miljoner elektronrör med oxidkatod. Förf. ämnar behandla oxidkatoderna i en kommande uppsats.

Principerna för avmagnetisering av fartyg.

Av **BJÖRN LÖTTIGER.**

Uppträdandet av magnetiska minor i början av det senaste världskriget skapade nya problem för sjöfarten, som trots riskerna måste fortgå i största möjliga omfattning. Det gällde att avlägsna det magnetiska kraftfältet under järn- och stålfartyg, så att de ej påverkade minorna. Magnetismen i fartygsskrov hade tidigare studerats i samband med utrönande av magnetkompassens felkällor. Man hade därvid inskränkt sig till undersökningar av förhållandena vid och intill kompassernas uppställningsplatser. Några erfarenheter, som kunde utnyttjas för lösning av avmagnetiseringsproblemet, förelågo däremot icke.

Den vanliga metoden för avmagnetisering av ett järnföremål är att placera det i en spole, som matas med växelström, vars styrka successivt minskas till noll. Avmagnetisering av ett fartyg sker i princip på samma sätt, men i mycket stor skala. Avmagnetiseringen är ett tekniskt problem, där det gäller att för rimlig kostnad åstadkomma en spole, som kan giva den för avmagnetiseringen erforderliga växelmagnetiseringen i fartyg samt att utforma spolen så, att fartygen kunna dragas igenom densamma. Anordningarna måste vara så beskaffade, att behandlingen kan ske snabbt och rutinmässigt, enär den tid, som fartyget uppehålles, är mycket dyrbar.

Magnetismen i ett järnskrov härrör från den induktion, som jordmagnetismen utövar. Under inverkan av mekanisk bearbetning, vibrationer från maskineri ävenså vid långvarigt stillaliggande på viss kurs blir magnetismen mer eller mindre permanent. Ett fartyg kan även magnetiseras av starkt magnetiska föremål i närheten, t. ex. andra fartyg, järnkonstruktioner i kajer eller elektromagnetiska lyftanordningar, som stundom användas vid lossning.

Enär ett fartygsskrovs form icke kan hänföras till en enkel geometrisk kropp, blir en beräkningsmässig undersökning av fältstyrkans variation under fartyget mycket invecklad. Man kan göra starkt förenklande antaganden, men det praktiska resultatet av sådana beräkningar blir ringa, isynnerhet som de magnetiska egenskaperna hos fartygsplåten är olika i olika delar av fartyget.

Man kan skilja på vertikalmagnetisering, långskeppsmagnetisering och tvärskeppsmagnetisering. Se fig. 1 och 2. Den inducerade vertikalmagnetiseringen (IVM) är beroende av jordmagnetiska vertikalfältstyrkan på den plats, där fartyget befinner sig.

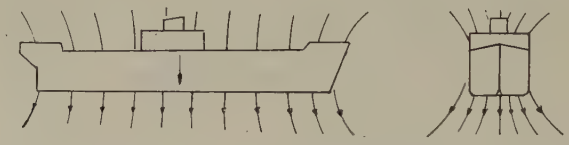


Fig. 1. Vertikal magnetisering.

Fig. 2. Horisontell magnetisering.

Den kan kompenseras antingen därigenom att man i en avmagnetiseringsstation inarbetar halvpermanent motriktad vertikalmagnetisering eller medelst en likströmsmatad spole monterad runt fartyget. Enär IVM är beroende av geografiska läget (breddgraden), kan den inarbetade motmagnetiseringen endast anpassas för viss zon. Dessutom försvinner den efter en tid, varför behandlingen måste upprepas med jämna mellanrum (4 à 6 veckor). Proceduren är emellertid enkel och användes i allmänhet på fartyg med en dräktighet understigande 1 500 BRT.

Kompensering av IVM medelst monterad spole, s. k. magnetskydd, ger ett varaktigt magnetiskt tillstånd i fartyget. Genom ändring av strömstyrkan kan kompenseringen anpassas efter breddgraden. Tack vare skrovformen och innanför skrovet befintliga järnmassor erfordras olika motmagnetisering (amperevarvtal) i olika delar av fartyget. Spolen är därför uppdelad i sektioner, i vilka erforderliga amperevarvtal för förskepp, lastrum o. s. v. kunna inställas var för sig. Kablarna kunna monteras på utsidan

eller insidan av skrovet. Vanligen läggas de innanför relingen ovan däck. För medelstora fartyg erfordras för strömmatningen en effekt av 8—12 kW motsvarande 500—700 amperevarv i spolarna.

Den inducerade långskeppsmagnetiseringen (ILM) och tvärskeppsmagnetiseringen (ITM) är liksom vertikalmagnetiseringen beroende av geografiska läget, men även av fartygets kurs. Den jordmagnetiska horisontalintensiteten, som orsakar ILM och ITM, är på våra breddgrader ca tredjedelen av vertikalintensiteten. Tillskottet i fältstyrka under fartyget blir på små och medelstora

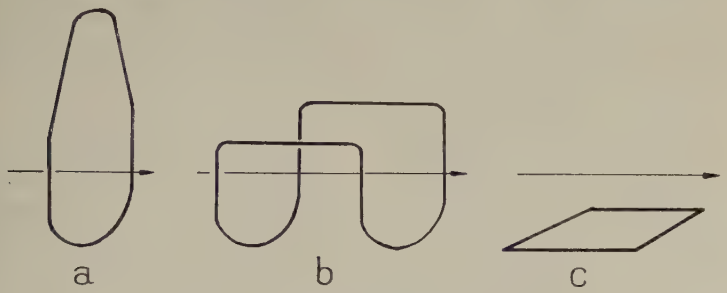


Fig. 3. Avmagnetiseringsspolar.

fartyg obetydligt men på stora fartyg märkbart. Medelst särskilda spolar — horisontella spolar på för och akter för ILM och vertikala spolar monterade inombords för ITM — kan inverkan härav kompenseras. Strömmen varieras efter kursen, antingen för hand eller automatiskt, om fartyget är utrustat med gyrokompassanläggning.

Permanent magnetism förekommer vertikalt, långskepps och tvärskepps i fartyg (PVM, PLM och PTM). PVM kan liksom IVM kompenseras med ovannämnda magnetskydd. För att spara kabel och ström är det emellertid bättre att taga bort PVM genom avmagnetisering. PLM i fartyg, som byggas i nordlig eller sydlig riktning kan bliva mycket kraftig. Det är lätt att av en mätning på ett tidigare icke avmagnetiserat fartyg fastställa i vilken riktning fartyget byggts. PLM och PTM borttages med avmagnetitering.

En avmagnetiseringsstation består av tre spolar, en för avmagnetisering, en för motmagnetisering och en för upphävande av det jordmagnetiska fältet samt en kraftanläggning, som lämnar ström till spolarna. I anslutning till anläggningen finnes även mätstationer, i vilka behandlingsresultaten kontrolleras.

Avmagnetiseringsspolen, som skall giva växelmagnetisering i fartyget, kan utformas på många sätt. Effektivaste formen är den vertikala, ovala spolen genom vilket fartyget får passera. Se fig. 3 *a*. Spolen omsluter fartyget, varigenom magnetiseringen kan tränga in även i de övre delarna såsom däck och överbyggnad. Spolen måste givas stor höjd över vattenytan, ca 30 m. Den är därför besvärlig att bygga, och kostnaderna bli stora. En sådan anläggning med 45 m fri höjd har utförts i Rotterdam.

God effekt erhålles med en spole enligt *b*. Förutsättningen härför är att avståndet mellan U-skänklarna är tillräckligt stort och att de nå upp i höjd med däck. Sådana spolar användas i många stationer, bl. a. i Stockholm. I denna station har spolen dimensionerna längd 46 m, bredd 26 m, höjd över vattnet 8 m och djup under vattnet 9 m. Maximalt kan spolen giva 50 000 amperevarv.

Den vanligaste utföringsformen är den plana bottenspolen enligt *c*. Den är förhållandevis billig i anläggnings- och underhållskostnad, enär den kan placeras direkt på botten eller på pålat underlag. En sådan spole är mindre effektiv än de ovan beskrivna. Amperevarvtalet måste därför göras ungefär dubbelt så stort som vid en spole enligt *b*. Avmagnetiseringsstationen i Karlshamn är utrustad med sådan spole. Dimensionerna äro 20 × 24 m på 9 m vattendjup. Den kan maximalt giva ca 120 000 amperevarv.

För ernående av ett homogent fält inom det område, där avmagnetiseringen sker, d. v. s. i närheten av avmagnetiseringsspolen, måste spolarna för motmagnetisering och för upphävande av jordmagnetiska fältet vara stora. Motmagnetiseringsspolen är horisontell och placerad på 8 m djup. Dess längd är 200 m och bredd 35 m. Även den andra spolen är rektangulär och har samma dimensioner. Den är snedställd, så att även den jordmagnetiska horisontalintensiteten utkompenseras. Dess norra långsida befinner sig ca 7 m ovan vattnet och dess södra långsida 7 m under vattnet. Bägge spolarna matas med likström. Sammanlagda amperevarvtalet är ca 12 000.

Strömmatningen till spolarna sker från roterande omformare. Det kan vara av intresse att i korthet beröra anordningen för generering av den lågperiodiga växelströmmen — se nedan — till avmagnetiseringsspolen. Spolen är ansluten till en normal likströmsgenerator på 1 500 kW med separat magnetisering. Magnetiseringsströmmen varieras sinusformigt med hjälp av ett aggregat, vars funktion framgår av fig. 4. *A* är en induktionsregulator (vridtransformator), som roterar med den önskade frekvensen. Primär-

lindningen är ansluten till 50-periodig växelström och sekundärlindningen till likriktare i bryggkoppling *B*—*C*; *D* är generatorns fältlindning ansluten till mittpunkten på sekundärlindningen och mittpunkten i bryggan. Tack vare en grundbelastning på likriktarna av 50-periodig växelström kommer, då *A* intar ett visst fasläge, endast endera av *B* eller *C* att släppa fram ström från *A*:s sekundärlindning. Om grundbelastningsströmmen i ett visst ögonblick passerar *B* i riktning, som angives av pil 1 (*C* är spärrad i denna riktning), kan strömmen från *A* passera enligt pil 2. Under nästa halvperiod är *B* spärrad och *C* öppen, varvid strömmen kan passera enligt pil 3. Då *A* intar ett 180° fasförskjutet läge, blir riktningarna av pilarna 2 och 3 omkastade. Resultatet blir en sinusformigt varierande ström genom *D* med en frekvens, som bestämmes av induktionsregulatorns rotationshastighet.

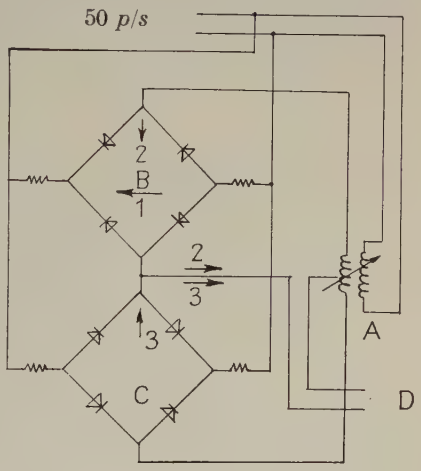


Fig. 4. Frekvensomvandlare (Asea).

Det är för att ernå största möjliga inträngning i fartygets järnmassor som man måste hålla växelströmmens frekvens låg. En undre gräns för denna bestämmes emellertid av fartygets hastighet över spolen; om frekvensen är för låg, erhålles en i längsriktningen vågformig uppmagnetisering. Man har funnit, att den gynnsammaste frekvensen ligger mellan 0,3 och 0,5 p/s.

Det är mycket viktigt, att växelströmmen är fri från likström, d. v. s. att negativa och positiva periodernas maximivärden äro lika. Tack vare remanens i generatorn erhålles en varierande likströmskomponent, som överlagras på växelströmmen. Om likströmmen uppgår till storleksordningen promille av växelströmmen, uppstår fullt märkbar, störande längsmagnetisering i fartygen. För att avhjälpa detta förser man generatorn med en extra magnetiseringslindning, som automatiskt kompenserar remanensen och håller växelströmmens positiva och negativa värden exakt lika.

De två andra spolarna matas med likström och äro anslutna till var sin normala likströmsgenerator.

Fig. 5 visar spolarnas anordning i avmagnetiseringsstationen i Karlshamn. Fartyget bogseras med ca 3 knops fart genom stationen. Då det passerar över avmagnetiseringsspolen, utsättes det för kraftig växelmagnetisering. Samtidigt ger motmagnetiseringsspolen den önskade vertikalmagnetiseringen. Två à tre behandlingar, stundom flera erfordras vanligtvis för att uppnå önskat resultat. Detta sammanhänger därmed, att fartygen sinsemellan äro mycket olika, och att ett fartyg från ena gången till den andra visar olika egenskaper, bl. a. beroende på dess last. Kraftcentralen är placerad så nära spolarna som möjligt, enär spänningsfallen i matningsled-

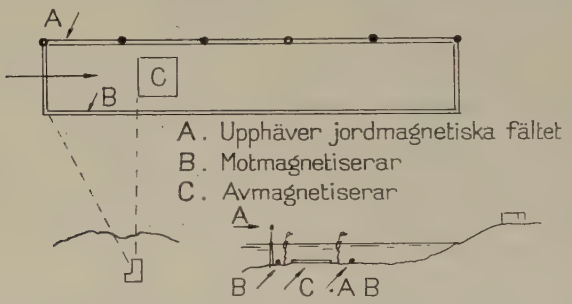


Fig. 5. Avmagnetiseringsstationen i Karlshamn. Plan och sektion.

ningarna annars bliva stora. Fartygen dirigeras medelst kraftiga högtalare.

För uppmätning av fältstyrkan under fartyg användes ett flertal olika apparater. En mycket använd apparat består av ett roterande ankare utfört i överensstämmelse med en vanlig likströmsgenerator men helt utan järn. Då ankaret roterar med konstant varvtal (drivet av en synkronmotor) i ett yttre magnetfält, alstras en spänning, som är direkt proportionell mot fältet. En ansluten voltmeter kan sålunda graderas i örsted.

Denna apparat lämpar sig emellertid icke för rutinmätningar på fartyg, enär man vid en mätning endast kan få fältstyrkan utefter en linje under fartyget (t. ex. utefter centrumlinjen, om fartyget passerar mitt över mätapparaten). I andra långskeppslinjen (t. ex. fartygssidan) har fältstyrkan ett annat förlopp. Man använder därför vid avmagnetiseringsstationerna en mätapparat, som anger ett medelvärde av fältstyrkan i tvärsektioner under fartyget. Den består av en smal, plan spole horisontellt placerad på visst vattendjup vanligen 10 m. Spolen är kopplad till en fluxmeter. Se fig. 6. Spolens dimensioner är 50 m i tvärskeppsriktningen och

2 m i långskeppsriktningen. Då fartyget passerar över spolen, inducerar dess magnetiska flöde i vardera av de båda långsidorna en spänning proportionell mot antalet kraftlinjer, som skära ledarna, d. v. s. mot ändringen i flödet. I den mån spolens bredd är liten i förhållande till längden av det förlopp, som skall mätas (i detta fall fartygslängden) och enär flxmetern anger $\int idt$, registerar mätapparaten approximativt ändringen i fältstyrkan. Enär fartygen ofta ha svårigheter att navigera exakt över spolens mittpunkt, har dess längd gjorts stor. En felnavigering på några

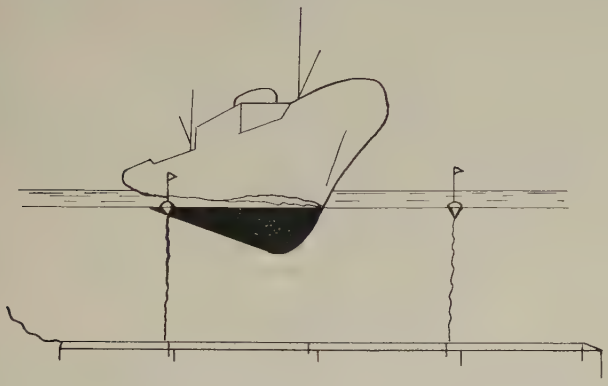


Fig. 6. Magnetisk mätning av fartyg.

meter betyder därför intet. Mätapparaten är i det närmaste oberoende av fartygets hastighet.

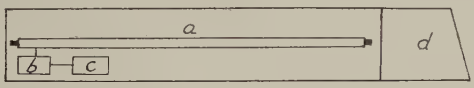


Fig. 7. Induktionsmina.

Även magnetiska induktionsminor användas för undersökning av fartygens magnetiska egenskaper. En sådan mina, fig. 7, består av en två meter lång spole lindad på en stavformad järnkärna med hög permeabilitet (*a*). Då fältstyrkan i närheten av minan ändras, induceras en spänning i spolen. Ett känsligt relä (*b*) kopplat till densamma sluter då en strömkrets innehållande batteri och tändanordning m. m. (*c*). Apparaterna och sprängladdningen äro inneslutna i en järncylinder, vars ände (*d*) är gjord av mjukare material. Då minan slår mot botten — den fälles från flygplan på låg höjd — stukas denna ände varvid stöten dämpas.

För mätändamål placeras sådana minor, givetvis utan sprängladdning, på olika bottendjup, och spolarna anslutas medelst kablar till reläerna, som tagits ur minorna och uppställts i ett mätrum. Reläernas utslag registreras, då fartyget passerar. Dessa mätningar äro beroende av fartygets hastighet och användas endast som komplement till ovan beskrivna mätningar.

I våra tre stationer i Stockholm, Göteborg och Karlshamn ha utförts sammanlagt ca 4 500 avmagnetiseringar av fartyg. Det är icke möjligt att siffermässigt angiva nyttan härav, men i flera fall finnas påtagliga uppgifter om att avmagnetiserade fartyg gått fria, medan icke avmagnetiserade fartyg under samma förhållanden sprängts. Om man sammanställer erfarenheter från mätningar av fartygens inverkan på magnetiska minor före och efter avmagnetisering med uppgifterna om det stora antal magnetiska minor, som fällts under kriget, finner man, att avmagnetiseringen verksamt bidragit till att vår sjöfart kunnat upprätthållas under de gångna svåra åren.

Bokanmälningar.

C. E. Sjöstedt, *Projektiv geometri.* Natur och Kultur, Stockholm (1946), 80 s., kr. 3:—, inb. kr. 4:—.

Visserligen är detta ej något helt nytt arbete av förf., då det tidigare varit publicerat som bilaga till en årsredogörelse (Östersunds läroverk, 1931—32), men då denna torde vara omöjlig att anskaffa, är den nu utgivna upplagan i hög grad välkommen. Den möjliggör för en vidare läsekrets att, utan något större mått av förkunskaper, stifta bekantskap med den projektiva geometrien och även vinna en ganska omfattande insikt om de sköna sammanhang och resultat, till vilka denna leder. Framställningen är i möjligaste mån konkret och anknyter till ett trettiotal tydliga figurer. Mot klarheten kunna inga väsentliga anmärkningar göras, möjligen är formuleringen i några fall väl knapp (beviset av Pascals sats t. ex.), så att läsaren tvingas till ökad tankeverksamhet; förmodligen har detta även varit förf:s avsikt.

Förf. har bemödat sig om att undvika imaginära kvantiteter men tar dem, låt vara flyktigt, till hjälp i kap. V (om kägelsnitten). Det hade nog varit lämpligt att just i detta sammanhang påpeka den oerhörda betydelse, som införandet av sådana storheter haft för den projektiva geometriens vidare utveckling, icke minst beträffande framställningens stringens.

Slutligen beklagas, att övningsuppgifter ej medtagits i denna upplaga. Den ursprungliga versionen innehöll 193 uppgifter, av vilka endast ett fåtal nu inarbetats i texten. Ett urval ur det rika förrådet skulle säkerligen varit till stor nytta för läsaren.

Slutomdömet kan emellertid endast bli en ivrig rekommendation till var och en, som intresserar sig för geometri, att studera detta arbete. Det lämpar sig såväl för läroverkens (äldre) elever — som för dess lärare.

Stig Comét.

Louis Kollros, *Cours de géométrie projective.* Bibliothèque scientifique 4. Éditions du Griffon, Neuchâtel (1946), 108 s., schw. fr. 9: 50.

Ernest Duporcq, *Premiers principes de géométrie moderne,* 3e éd., Gauthier-Villars, Paris (1938), 174 s., kr. 7: 50.

Utrymmet medger endast ett kort omnämnande av dessa böcker, vilka båda, i angiven ordningsföljd, lämpa sig vid det fortsatta studiet av projektiv geometri (efter Sjöstedt, se ovan). Imaginära kvantiteter äro principiellt medgivna. Övningsuppgifter finnas (82 resp. 79 st.). Särskilt Duporcqs framställning är elegant.

Stig Comét.

S. L. Green, *Introduction to Differential Equations.* London 1945, 138 sid.

E. L. Ince, *Integration of Ordinary Differential Equations.* Edinburgh and London 1944, 146 sid., 5 s.

Dessa läroböcker äro båda ägnade åt elementen av teorien för differentialekvationer. De behandla sålunda de vanligaste typerna av ordinära differentialekvationer, vilka kunna integreras med hjälp av välbekanta funktioner samt de integrationsmetoder, som därvid böra användas. Vidare är i vardera boken ett kapitel ägnat åt lösning medelst serier och slutligen i Greens bok dessutom ett par kapitel åt partiella differentialekvationer. Båda böckerna innehålla ett stort antal övningsexempel.

Framställningen i Greens bok är lättläst och bygger i stor utsträckning på en detaljerad behandling av belysande exempel. Den karaktär av recepthandbok, som är vanlig vid läroböcker på detta område, undvikes därigenom i viss mån. En del icke oviktiga detaljer ha dock fått en väl undanskymd ställning, t. ex. i fråga om integrerande faktorer, vilket måhända beror just på detta framställningssätt.

Inces bok, som i motsats till Greens icke behandlar partiella differentialekvationer, innehåller i gengäld en avdelning om singu-

lära lösningar och en om singulära punkter (figurer saknas tyvärr helt). Boken är även i övrigt inom det behandlade området ofta mera grundlig än den föregående men kanske ej så lättläst som denna.

De praktiska syftemål, som böckerna tydligen avse att tjäna, ha gjort, att alla existens- och entydighetsfrågor lämnats åsido. Båda innehålla emellertid i stort sett vad som brukar fordras i fil. ämbetsexamen (samt åtskilligt därutöver). Speciellt Inces bok torde därför väl kunna användas som lärobok på detta stadium, medan Greens bok torde behöva kompletteras på några punkter.

Göran Borg.

Thorleif Johansen, *Matematikken i oldtiden.* Aschehoug, Oslo 1945. 105 s., kr. 6:75.

Man brukar säga att matematiken liksom latinet har ett bildningsvärde. Säkert är det också så. Båda ämnena uppövar förmågan att tänka självständigt: att kombinera givna fakta och därav dra riktiga slutsatser, och att inte utan kritisk granskning godtaga något. Men latinet ger dessutom någonting mer ur ren bildningsynpunkt: kunskap om sekler av gången kultur och om människoandens verk redan för tusentals år sedan, perspektiv på människan. Det skulle kunna vara på liknande sätt med matematiken, som ju kanske är den äldsta av alla vetenskaper. I synnerhet på gymnasiet, där målet är eller åtminstone borde vara bildning och inte förberedande fackstudier för teknologer eller tandläkare, och där det kunskapsmått som meddelas endast obetydligt överstiger och delvis inte når upp till de babylonska och hellenska kulturernas matematiska vetande, borde det vara alldeles naturligt att låta det historiska perspektivet få vara med i matematikundervisningen så mycket som möjligt.

Dessa reflexioner äro närmast föranledda av lektor Johansens alldeles ovanligt trevligt skrivna lilla bok om forntidens matematik. Förf. behandlar egyptisk, babylonisk och indisk matematik, men huvuddelen ägnas givetvis åt den hellenska matematikens nästan tusenåriga period. Man får uppliva bekantskapen med den geometriska algebran, abacusräkningen, Euklides' parallellpostulat, Zenons paradoxer, Eratosthenes' såll, de klassiska problemen om kubens fördubbling, vinkelns tredelning och cirkelns kvadratur och andra ting, som avgjort hör till matematisk allmänbildning. Framställningen är illustrerad med en mängd räkneexempel och geometriska bevis från originalarbetena, antingen dessa nu äro kilskriftstavlor eller papyrusrullar. Läsningen av kapitlet om Arkimedes' geniala verk är verkligt stimulerande, åtminstone kände

anmälaren därvid en glädje av mera ovanligt slag. Boken bör vara en ypperlig premiebok för både latinare och realister. Den rekommenderas livligt till alla som tycker, att matematik är något roligt. De komma inte att bli besvikna. *Sven Hilding.*

Bart J. Bok and Priscilla F. Bok, *The Milky Way.* Sec. Ed., The Blakiston Co., Philadelphia 1945, Pp. 224, kr. 15:80.

Harlow Shapley, *Galaxies.* The Blakiston Co., Philadelphia 1945, Pp. 229, kr. 15:80.

Leo Goldberg and Lawrence Aller, *Atoms, Stars and Nebulae.* The Blakiston Co., Philadelphia 1945, Pp. 323, kr. 15:80.

Dessa tre rikt illustrerade böcker ingå i serien »The Harvard Books on Astronomy» utgiven från Harvard-observatoriet, ett av U. S. A:s ledande observatorier.

Bart J. Boks och hans makas bok om Vintergatan ger i lättillgänglig form en utomordentlig översikt av moderna forskningsresultat rörande Vintergatans byggnad. I de båda första kapitlen skissera författarna i korta drag Vintergatans allmänna utseende och struktur samt metoder för bestämning av avstånd, ljusstyrkor, färger, rörelser m. m. Därefter undersökes fördelningen av stjärnorna i solens närmaste omgivning, varefter i kap. 4 undersökningen utsträckes till stora avstånd och vårt stjärnsystems byggnad studeras ingående. Sedan vi sålunda lärt känna systemets form och utsträckning, behandlas i nästa kapitel på ett klargörande sätt Vintergatans rotation, i kap. 6—8 ljusa och mörka nebulosor, den interstellära gasen och den allmänna absorptionen, varvid särskilt poängteras de stora svårigheter, som absorptionen medför för avståndsbestämningarna. Slutligen diskuteras Vintergatsystemets ställning som spiralnebulosa och systemets ålder. Av särskilt värde i 2:a upplagan är det tillägg, som avslutar boken. Däri refereras många nyare forskningsresultat, som knappast ännu blivit kända på grund av avbrottet i de vetenskapliga förbindelserna under kriget.

Harlow Shapley, Harvard-observatoriets chef, ger i sin bok Galaxies en fascinerande skildring av hur astronomerna under de sista decennierna lyckats utforska stjärnsystem och grupper av stjärnsystem ut till 100-tals miljoner ljusårs avstånd. Shapleys bok är den mest lättlästa av de tre här refererade. Den behandlar först våra närmaste grannar bland stjärnsystemen, de Magellanska molnen och övriga »närbelägna» stjärnsystem såsom Andromedanebulosan, Messier 33 m. fl. Om alla dessa stjärnsystem gäller, att de enligt senaste forskningsresultat synas vara betydligt större än man tidigare trott. Vintergatsystemets ställning såsom ett stjärn-

system bland miljoner andra behandlas i ett kapitel. Slutligen för oss förf. ut i det stora metagalaktiska systemet, och man läser hans framställning med aldrig slappnande intresse. Boken avslutas med ett kapitel om det expanderande universum.

Leo Goldbergs och Lawrence Allers bok om atomer, stjärnor och nebulosor ger i början en kortfattad mycket elementär översikt av olika astronomiska data, hjälpmedel och typer av stjärnor samt atomens byggnad och uppkomsten av linje- och bandspektra. Det förefaller som om dessa kapitel äro väl kortfattade för en läsare, som ej känner till sakerna förut, men överflödiga för mer skolade läsare. I kap. 4—5 behandlas jonisationen i stjärnatmosfären samt skillnaden i spektra mellan superjättar, jättar och dvärgar. Särskilt givande är diskussionen av olika breddningseffekter för spektrallinjer. Ett utmärkt kapitel är det 6:e, som behandlar analysen av stjärnatmosfärens kemiska sammansättning och antalet atomer på grundval av tillväxtkurvan. De följande kapitlen behandla pulserande stjärnor, exploderande stjärnor (novae), planetariska nebulosor samt den interstellära rymden. Kap. 11 ger många intressanta exempel på särskilt märkvärdiga stjärnor, som äro omgivna av mycket vidsträckta atmosfärer och som följaktligen ha egendomliga spektra. Slutligen sammanfattas i sista kapitlet nyare undersökningar rörande energiproduktionen inom stjärnorna. I ett antal tillägg finner man astronomiska och fysikaliska konstanter, formler beträffande magnituder, avstånd, jonisation och excitation m. m., som kunna vara till stor nytta.

Åtskilliga grundläggande astronomiska begrepp och även många resultat finner man behandlade i alla tre böckerna, vilket kanske kunde ha undvikits, men det är väl utgivarnas mening, att varje bok skall så vitt möjligt bilda en enhet för sig. Övriga hittills utkomna böcker i serien behandla astronomiska instrument, planetsystemet, variabla stjärnor, solen och stjärnornas inre.

Carl Schalén.

Martin Johnson, *Time, Knowledge and the Nebulae.* London 1945. Faber and Faber. Pp. 189.

Fysikens tidsbegrepp undergick genom Einsteins speciella relativitetsteori av år 1905 en radikal omvandling. Två iakttagare, som befinna sig i rörelse i förhållande till varandra, kunna icke jämföra sina iakttagelser, om de icke begagna sig av olika tidsskalor, bestämda av iakttagarnas relativa rörelse. I den mycket omdiskuterade relativitetsteori, som uppställdes av E. A. Milne för ett tiotal år sedan, kan tiden ha olika mening för en och samma iakttagare.

Olikheten mellan de för en och samma punkt gällande tidsskalorna skall i regel vara betydelselös. Vad teorien vill förklara är rödförskjutningen av spektrallinjerna hos de extragalaktiska nebulosorna, icke som en Dopplereffekt hos ljuset från materien i ett expanderande universum, utan som en följd av differensen mellan två tidsskalor. Dessa, som stå i ett enkelt funktionssamband med varandra, ge en mätbar förändring av en spektrallinjes svängningstal, då nebulosans ljus har en ålder, som är jämförbar med en universell konstant t_0, kallad universums ålder och tillnärmelsevis lika med 10^9 år. Genom att en Keplerrörelse vid transformation från den ena tidsskalan till den andra övergår i en spiralrörelse ges också en förklaring till nebulosornas spiralform.

En klar och intresseväckande redogörelse för dessa teorier ges av M. Johnson i föreliggande bok, vilken inledes av ett auktoriserande företal av E. A. Milne, själv. Författarens huvudintresse synes emellertid ligga mera åt det filosofiska och psykologiska hållet och stort utrymme ägnas åt de axiomatiska grunderna för Milnes teori. På dessa områden äro författarens tankegångar icke alltid så lätta att följa för en fysiker. De förklarande noter, avsedda för icke-fysiker, som avsluta boken, kunna i och för sig rekommenderas men torde i allmänhet vara för svåra och för kortfattade för att fylla sitt ändamål. *Nils Svartholm.*

P. J. Oranje, *Grundlagen, Anwendungen, Eigenschaften von Gasentladungslampen.* Philips technische Bibliothek, Eindhoven, 1943. 294 s., kr. 16:85.

I juli 1932 belystes en landsväg i Holland för första gången med natriumljus, och därmed hade utvecklingen av gasurladdningslampan för belysningsändamål inträtt i ett aktivt skede. Gasurladdningslampans ljustekniska egenskaper äro så väsentligt olika glödlampans, att en grundläggande beskrivning av hithörande lamptyper måste vara av stort intresse. Föreliggande bok är ej endast avsedd för fackmannen utan vänder sig även till en vidare krets. Det förhåller sig ju faktiskt så, att många människor av i dag stå lika undrande inför gasurladdningslampans mysterier, som man förr i tiden gjorde inför glödlampans. Det bör dock framhållas, att man ej kan läsa boken med verklig behållning utan ett visst mått av förkunskaper inom elektricitetslära och optik.

I bokens första del redogöres för gasurladdningens teoretiska grunder, speciellt stabiliseringen av likströms- och växelströmsurladdningar med hjälp av motstånd, drosselspolar, transformatorer och kondensatorer. I den andra och större delen följer sedan en utförlig beskrivning av olika slag av gasurladdnings-

lampor: natriumlampor, högtrycks- och superhögtryckskvicksilverlampor med luft- och vattenkylning, rörformiga lågtryckskvicksilverlampor med lysämnesbeläggning , blandljuslampor, ultravioletts trålande lampor, olika slag av lampor för flygfältsbelysning, stroboskoplampor, m. m.

Lampornas speciella driftsegenskaper beskrivas ingående: anordningar för startande av urladdningen, förkopplingarnas inverkan på urladdningen, inverkan av tryck och temperatur på de atomära processerna hos urladdningen i nära anslutning till den på spektroskopisk väg erhållna uppfattningen om urladdningens natur, färgkorrektion med hjälp av tillsatsämnen. Vidare behandlas lampornas ljusfördelning och övriga belysningstekniska egenskaper, synskärpa och kontrastbildning vid olika slags ljus, livslängd, ljusutbyte och ekonomiska synpunkter, driftsstörningar.

Boken har följt den tekniska utvecklingen fram till hösten 1942. Papper, tryck och illustrationsmaterial äro av högsta klass.

B. Grundström.

Gunnar Randers, *Atomkraften, verdens håp eller undergang.* J. W. Cappelens forlag, Oslo 1946, 218 s., kr. 14: —.

Den första norska boken om atomkraften har nu inställt sig i den långa raden av populära verk, som sedan ett år tillbaka utgivits i detta ämne. Förf. är en yngre vetenskapsman, som under kriget vistats i Amerika och f. n. föreståt den fysikaliska avdelningen vid Forsvarets forskningsinstitutt samt vikarierar som professor i astronomi vid Oslo universitet.

Först läsa vi en kortfattad och lättbegriplig översikt av atomfysikens utveckling under åren 1900—1940. Till denna avdelning höra kapitlen kvanter, radioaktivitet, atomer, energi och massa, elementarpartiklar, atomkärnor och atomomvandlingar. Därpå följer i kapitlen uran och atomsprängning, atombomben, Hiroshima, Nagasaki och Bikini en skildring av den lavinartade utvecklingen fram till år 1946. Arbetet avslutas med några framtidsprognoser.

Bokens sakliga innehåll skiljer sig sålunda icke väsentligt från de andra böckerna i samma ämne, men man frapperas genast av förf:s lediga och utpräglat personliga stil, som utmärkes av en stark tro på civilisationens bestånd och utvecklingsmöjligheter i den nu begynnande atomåldern. »Et av formålene med denne boka er å gi leserne en følelse av at vi står ved begynnelsen til en lang og ukjent vei full av muligheter, og ikke ved slutten av en vei som leder til undergang.» Kriget var redan före atombomben så förödande för mänskligheten att vilken som helst radikal förändring i situationen må hälsas välkommen. Atombomben kan komma att

utgöra grunden för ett nytt försök att bevara freden. Förf:s optimism är dock icke av den ljusblåa sorten utan så långt möjligt sakligt motiverad. Beträffande våra militära försvarsmöjligheter mot atombomber är han avgjort pessimistisk, och därvid finner han stöd för sin åsikt hos en rad av världens främsta atomforskare.

I slutet av boken finnes en redogörelse för den rapport angående internationell kontroll av atomenergien som utfärdades i mars 1946 av den s. k. Lilienthalkommittén. Däri framhålles bl. a. att möjligheterna för en effektiv kontroll underlättas därav att uran är det enda element, som kan underhålla en kedjereaktion och som därför f. n. utgör nyckeln till varje användande av atomenergien.

B. Grundström.

A. F. Harvey, *High Frequency Thermionic Tubes.* Chapman & Hall Ltd, 2nd Ed., London 1944, 235 sid., 18 s.

Detta arbete behandlar kortfattat och tämligen elementärt alla de vanliga metoderna för generering av ultrahögfrekventa svängningar (upp till ca 600 Mc/sek). I bokens tre första kapitel redogöres för frekvensegenskaperna hos dioden, trioden och månggallerrören samt för Barkhausen-Kurz- och Gill-Morrell-svängningar. Huvudparten av arbetet behandlar magnetronrören, vilka författaren ägnat ett flerårigt experimentellt studium. Självfallet äro de moderna högeffektmagnetronerna inte med, eftersom de vid tiden för bokens publicering höllos hemliga av militära skäl. I sista kapitlet behandlas mycket kortfattat de hastighetsmodulerade rören (klystroner och liknande) samt vågledare, resonatorer och elektromagnetiska horn. Boken innehåller en värdefull bibliografi, som upptar över 500 arbeten.

Mikrovågstekniken har utvecklats kraftigt under kriget, och den torde komma att visa sig vara ett värdefullt verktyg även för den rena fysiken. Åt den, som vill skaffa sig kännedom om detta område, kan man rekommendera Harveys lilla arbete såsom »propedeutisk kurs», även om boken inte är up to date.

Torsten Jönsson.

Robert C. Higgy, *Fundamental Radio Experiments.* John Wiley & Sons, New York 1943, 95 sid., $ 1.50.

Ralph H. Müller-R. L. Garman-M. E. Droz, *Experimental Electronics.* Prentice-Hall, Fourth Printing, New York 1944, 330 sid., $ 4.65.

Dessa båda laborationshandböcker ge fysikläraren många goda uppslag till uppgifter för enskilt arbete.

Higgy beskriver 32 försök, som åskådliggöra de grundläggande principerna inom radiotekniken. För några av försöken kräves

tillgång till oscillograf, men för flertalet fordras endast allmänt tillgänglig instrumentutrustning samt materiel, som kan anskaffas till ringa kostnad från radiofirmorna. Då Higgys bok inte är avsedd som lärobok, torde eleven behöva göra kompletterande studier i någon elementär sådan, t. ex. Hoag, *Basic Radio* (rec. i årg. 29, sid. 103).

Müller-Garman-Droz behandlar elektronrörens fysikaliska egenskaper samt deras användning inom mättekniken och för kontroll- och styrändamål, däremot inte de kommunikationstekniska tillämpningarna. Uttömmande anvisningar ges för 70 experiment, och varje experimentbeskrivning föregås av en utförlig introduktion. Boken innehåller därjämte 103 problem, som huvudsakligen utgöras av konstruktionsuppgifter, samt ett stort antal litteraturanvisningar. Författarna ha flerårig erfarenhet som ledare av kurser i experimentell elektronik, och deras arbete fyller därför även ur pedagogisk synpunkt mycket högt ställda krav.

Torsten Jönsson.

Fuson-Snyder, *Organic Chemistry.* John Wiley and Sons, New York and London 1944, Pp. 506, kr. 22:10.

I bokens förra hälft framläggas viktigare grupper av organiska föreningar samt principerna för deras framställning och reaktioner såsom ett avslutat helt. Den senare delen utgör en utvidgning av kursen och behandlar ingående vissa nya föreningstypers framställning, omgrupperingar och fysikalisk-kemiska förhållanden, varvid valenstyper och elektronfördelning få tillbörligt beaktande. Med klara och överskådliga formler illustreras rikligt de ledande principerna, och vart och ett av de 34 kapitlen avslutas med en samling frågor, avsedda att fördjupa och befästa kunskaperna.

Det logiska framförandet samt frånvaron av ovidkommande tekniska detaljer gör boken till en intressant läsning, vida överträffande de hackiga och vanligen ganska torra läroböcker som för ett par årtionden sedan voro vanliga vid våra universitet och högskolor.

E. Nordefeldt.

A. I. Vogel, *Qualitative Chemical Analysis,* Longmans, Green, and Co., London 1945, Pp. 578, 12s. 6d.

I föreliggande tredje upplaga behandlas på ett hundratal sidor den kvalitativa analysens teori och fysikalisk-kemiska bakgrund, varefter följer utförlig framställning av de olika katjonernas och anjonernas reaktioner, systematisk analysgång för oorganiska substanser, sällsyntare grundämnens reaktioner, förenklad ana-

lysgång för den som ej önskar fördjupa sig i ämnet samt halvmikrometoder, varvid organiska specialreagens användas i stor utsträckning.

Förutom att boken för analytikern torde vara en tillförlitlig kunskapskälla bör den uppmärksammas även av de kemilärare som önska ge eleverna analytiska uppgifter som enskilt arbete. Härvid innebära halvmikrometoderna ett stort steg framåt mot renligare, billigare och intressantare arbetsgång, och de förtjäna att införas i ökad utsträckning i våra skolor. *E. Nordefeldt.*

Michael Weinstein, *Precious and Semi-Precious Stones.* Pitman, London 1944, Pp 185, 10 s. 6 d.

Redan i Bibeln nämnas ädla stenar, och män som Julius Cæsar och Alexander den Store voro ivriga samlare av dessa skimrande och hemlighetsfulla mineral. Diamanten, som ej liksom de övriga kunde slipas med smärgelpulver, blev först senare känd jämte åtskilliga andra, och under 1900-talet började vissa konstgjorda stenar tävla med de naturliga.

De första diamanterna i Sydafrika upptäcktes av lekande barn, och man trodde då, att verkliga diamanter, som ju voro hårdast av alla ämnen, ej kunde slås sönder. En av de först upptäckta stora stenarna lämnades därför för kontroll till en smed, som lade den på städet och lyckades krossa den med hammaren, sålunda bevisande för ägaren, att det ej kunde vara fråga om en diamant — vilket det tyvärr dock var, ty dessa äro ganska spröda för slag och kunna krossas redan vid fall mot ett hårt golv.

Till de ursprungliga ädelstenarna rubin, safir, smaragd, opal och diamant ansluta sig numera omkring ett 30-tal halvädla stenar samt de sedan forntiden kända bärnsten och pärlor. Alla dessa behandlas i boken på ett populärt sätt med avseende på sammansättning, utseende, kännetecken, förekomst och bearbetning, illustrerat av en vacker färgplansch och ett sextontal helsidesfotografier.

E. Nordefeldt.

Teknisk Bokkatalog 1946, utg. av H. Lindståhls Bokhandel, Stockholm, 38 s.

Katalogen gör inte anspråk på bibliografisk fullständighet men upptager allt väsentligt av de senaste årens svenska tekniska facklitteratur och därutöver även rätt många danska och norska böcker. Den utgör en värdefull orientering, av betydelse ej enbart för teknikern utan även för en var med matematiskt-naturvetenskapliga intressen. *C. E. B.*

Gradualavhandlingar.[1]

Tore Nilsson, *Några sultoner, deras framställning och hydrolys.* Lund 1946, 108 s. Disp. vid Lunds Universitet den 16 mars 1946. Opponenter: docent Tage Bergkvist och civiling. Axel Assarsson.

En sulton är en inre ester av en oxisulfonsyra. Dess motsvarighet bland karbonsyrederivaten är laktonen. Medan laktonerna sedan länge äro väl kända ifråga om både framställningsmetoder och egenskaper, ha hittills endast ett mindre antal sultoner beskrivits i litteraturen. Dessa utgöra i regel derivat av aromatiska sulfonsyror, medan däremot de enkla, monocykliska sultonerna tidigare ej framställts.

För att kunna bedöma möjligheten att framställa de enkla sultonerna har förf. först undersökt några bromsubstituerade alifatiska sulfonsyrors hydrolys. Härvid är speciellt δ-brombutansulfonsyrans beteende i neutral och svagt sur lösning av intresse. Ändringen i vattenlösningens väteion- och bromidionkoncentrationer under hydrolysen visade, att en sulton troligen bildades som mellanprodukt vid hydrolysförloppet. Vid ett preparativt hydrolysförsök kunde förf. också genom upprepad extraktion med bensol isolera den enklaste, mättade δ-sultonen.

I följande kapitel beskriver författaren framställningsförfaranden för nio tidigare ej kända sultoner. Som syntesmetod har använts vattenavspjälkning i vakuum ur alifatiska oxisulfonsyror och destillation av reaktionsprodukten. Denna metod har i motsats till äldre litteraturuppgifter visat sig vara mycket användbar. Även genom torrdestillation av natriumsalter av bromsubstituerade alifatiska sulfonsyror erhölls sultoner i de tre fall, då denna metod prövades.

Sex av de framställda sultonerna äro mättade γ-sultoner, dels den enklaste osubstituerade, dels mono- och dimetylsubstituerade. Förutom den vid ovannämnda hydrolysförsök erhållna δ-sultonen har ett metylderivat av densamma framställts. Slutligen beskrivas försök att erhålla den enklaste, mättade sjuledade sultonen, varvid dock i samtliga fall på grund av omlagringsreaktioner isomerblandningar erhöllos, ur vilka ren ε-sulton ej kunde isoleras. Även vid framställning av δ-sultonerna ur motsvarande oxisyror eller bromsubstituerade sulfonsyrasalter erhöllos små mängder isomera produkter, vilka i två fall isolerades och identifierades som γ-sultoner. Metoder att framställa rena δ-sultoner ur isomerblandningarna anges.

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

Sultonerna hydrolyseras i vattenlösning enligt monomolekylärt schema. Hydrolysen katalyseras ej av väteioner och leder ej till någon jämvikt. Den alkaliska hydrolysen överväger som regel ej över den spontana reaktionen i utspädd vattenlösning. I samtliga dessa hänseenden bete sig sultonerna analogt med sulfonsyreestrar av de alifatiska alkoholerna.

För de flesta sultonerna har förf. bestämt hastighetskonstanter för den spontana hydrolysen vid tre temperaturer och beräknat aktiveringsenergi och aktionskonstanter för ifrågavarande reaktioner.

Reaktionsprodukten vid sultonernas hydrolys utgjordes i regel av oxisulfonsyror. En av γ-sultonerna, vilken kan betraktas som ester av en tertiär alkohol, gav dock vid hydrolys avsevärd mängd omättad syra. Likaså erhöllos mindre mängder omättad substans vid hydrolys av de sultoner, som kunna betraktas som estrar av sekundära alkoholer.

Med den enklaste γ-sultonen utfördes även ett par preparativa försök, varvid med ammoniak bildades aminosyra och i koksaltlösning γ-klorpropansulfonsyra.

De framställda sultonerna äro dels fasta, dels flytande substanser med kokpunkten mellan 110 och 120° C vid 1—2 mm tryck. För de vid rumstemperatur flytande sultonerna har molrefraktionen bestämts vid 20° C. De härur för $-SO_2 \cdot O-$ gruppen beräknade refraktionsvärdena stämma väl överens med tillgängliga litteraturuppgifter för sulfonsyraestrar.

Sven Cederblad, *Studies of Bright Diffuse Galactic Nebulae with Special Regard to Their Spatial Distribution.* Lund 1946, 166 s. Disp. i Lund $^{20}/_{5}$ 1946. Opponenter: docent Anders Reiz och amanuens Henrik Kristenson.

Författaren har avsett dels att ge en sammanställning av vissa data för objektgruppen ljusa, diffusa, galaktiska nebulosor (i fortsättningen för korthets skull benämnda endast »nebulosor»), dels att undersöka några geometriska egenskaper hos dessa nebulosor och att studera deras fördelning i rymden — detta senare med utgångspunkt från Hubbles och Lundmarks pioniärundersökningar i början av tjugotalet, vilka tills dato stått utan efterföljare i större skala.

Avhandlingen inledes med en historisk redogörelse för vår kunskap om nebulosorna och dennas utveckling från upptäckten av Orionnebulosan 1610 fram till Hubbles avhandlingar om de ifrågavarande objekten år 1922. Här har författaren särskilt uppehållit sig vid nebulosornas upptäcktshistoria och vid de olika före-

ställningar om objektens natur, som varit rådande under skilda tider.

Med hjälp av kompilerade och i mån av möjlighet till enhetligt system reducerade stjärnmagnituder (m) samt egna mätningar (utförda på tillgängliga fotografiska reproduktioner) av angulära maximiavståndet (för en viss standardexponering) från den genererande stjärnan till nebulosans rand (a_1) diskuterar författaren den s. k. »Hubbleska lagen»: $m + 5 \log a_1 =$ konstant, vilken bekräftas av det utvidgade materialet. Det visas vidare, att lagen kan härledas teoretiskt ur något allmännare premisser än Hubbles.

Nebulosornas apparenta fördelning över himmelssfären ger (vilket tidigare påvisats av Hubble för ett mindre material) avspeglingar dels av det s. k. lokala systemet, dels av vintergatan.

Innan nebulosornas avstånd undersökes, diskuterar författaren i ett fristående kapitel den allmänna interstellära absorptionen, till vilken man måste taga hänsyn vid fotometriska bestämningar av distanser. Härvid användes geometriska medelavstånd (härledda ur egenrörelser) för sådana O- och B-stjärnor, för vilka färgexcesser ha bestämts av Stebbins, Huffer och Whitford. För närvarande föreligger egenrörelser för sådana stjärnor till ett antal av 987, varav 337 helt nybestämts eller förbättrats av författaren med hjälp av stjärnpositioner bestämda med Lunds Observatoriums meridiancirkel. Ur detta material beräknas dels den absoluta magnitudskalan för de ifrågavarande stjärnorna, dels förhållandet mellan visuell totalabsorption och motsvarande färgexcess. De erhållna resultaten överensstämma med av Stebbins, Huffer och Whitford tidigare funna. I samband med denna undersökning påpekas, att man vid jämförelser mellan färgindices mätta i olika system bör särskilja smala spektralklassintervall, varvid den oöverensstämmelse försvinner, som förefinnes mellan å ena sidan spridningen i ett jämförelsediagram upptagande stjärnor av olika spektrala underavdelningar tagna tillsamman och å andra sidan den inre noggrannheten i respektive mätningsserier.

Vid bestämning av individuella och statistiska avstånd till nebulosorna ifråga är man hänvisad till indirekta metoder, vanligen anknutna till de stjärnor, som äro objektens ljuskällor. Författaren har i de fall där så varit möjligt ur tillgängliga data härlett och samarbetat avståndsvärden för de olika nebulosorna och härvid själv bidragit med nybestämda och förbättrade egenrörelser för stjärnor förbundna med nebulosor. På grundval av de sålunda härledda avstånden samt mätningar (på tillgängliga fotografiska reproduktioner) av nebulosornas apparenta dimensioner har vidare härletts en serie värden på objektens absoluta dimen-

sioner. Dessa visas vara av samma genomsnittliga storlek som samma typ av nebulosor funna i det Lilla Magelhaeska Molnet.

Större delen av avhandlingens resultat är sammanfattad i en nebulosakatalog med tillhörande anmärkningar och bibliografiska hänvisningsnoter för de enskilda objekten. Avhandlingen avslutas med en bibliografi till ifrågavarande gren av astronomien omfattande tiden från Holdens nebulosabibliografi, 1877, fram till 1941, efter vilken tidpunkt det på grund av kriget icke varit möjligt att nå fullständighet ens ifråga om viktigare arbeten.

Nils Erik Fremberg, *A Study of Generalized Hyperbolic Potentials with some Physical Applications.* Disputation i Lund den 24 maj 1946. Opponenter: docenterna Åke Pleijel och Lars Gårding.

Som bekant uppträda inom teorien för Cauchys problem för hyperboliska differentialekvationer i mer än två oberoende variabler speciella divergenssvårigheter. Dessa bero på den singulära karaktären av fundamentallösningen, vilken gör det omöjligt att direkt använda Greens formel. Dessa svårigheter bemästrades av Hadamard genom införandet av begreppet »ändliga delen av en oändlig integral» (*partie finie*). Hadamard lyckades därigenom lösa Cauchys problem för den allmänna lineära normalt hyperboliska differentialekvationen. — Genom en generalisering av den klassiska Riemann-Liouvilleska integralen har prof. Marcel Riesz (1936, 1937) givit en ny interpretation av begreppet *partie finie* med hjälp av analytisk fortsättning. På denna grundval har han angivit en ny metod för behandling av Cauchys problem, vars lösning han erhållit i form av den analytiska fortsättningen av ett uttryck, som beror analytiskt av en exponentiell parameter. Bland fördelarna hos denna metod må framhållas, att ekvationer i jämna och udda dimensioner kunna behandlas analogt med och oberoende av varandra, medan Hadamard i sin teori först löser problemet för udda dimensioner och därefter återför fallet av jämna dimensioner på det förra genom en speciell *méthode de descente.*

Avhandlingen är ägnad ett studium av problem förbundna med Riesz' generalisering av Riemann-Liouvilles integral. Den innehåller speciellt en undersökning av Riesz' lösning av Cauchys problem för ekvationen $\Delta u = f$, där Δ är den s. k. vågoperatorn i ett godtyckligt antal ($\geqq 3$) dimensioner, samt några tillämpningar av Riesz' metod på det elektromagnetiska fältet och på mesonfältet.

Efter en översikt i kap. 1 av grundläggande geometriska begrepp i den m-dimensionella Lorentz-rymden ges i kap. 2 ett referat av Riesz' generalisering av Riemann-Liouvilles integral och dess användning inom teorien för Cauchys problem för vågekvationen. De

uppträdande integralerna — vilka kunna betraktas som generaliseringar av den vanliga potentialteoriens volym- och ytpotentialer — kallas här Rieszpotentialer. Ett av avhandlingens huvudmål är att explicit genomföra den analytiska fortsättningen av dessa. För detta ändamål införes (kap. 3) ett för de behövliga räkningarna särskilt lämpligt koordinatsystem, varigenom de olika potentialerna kunna uttryckas genom en viss integral, kallad typintegralen. Undersökningen av typintegralen i kap. 4 ger sådana generella resultat, som kunna tillämpas på de olika potentialerna, vilka undersökas i kap. 5, 6 och 7, varefter i kap. 8 lämnas den nödvändiga men ej tidigare utförda verifikationen av Riesz' lösningsformel för Cauchys problem. — Efter en kort behandling i kap. 9 av ett gränsfall, där initialytan i Cauchys problem är oändligt avlägsen, studeras i kap. 10 med särskilt tanke på fysikaliska tillämpningar generaliserade linjepotentialer, vilkas samband med det s. k. utstrålningsproblemet beröres. I kap. 11 tillämpas Riesz' metod på den mera generella ekvationen $(\Delta + \varkappa^2)u = f$, vilken i 4 dimensioner är identisk med Yukawas ekvation för mesonfältet. Undersökningen av denna ekvation återföres på den redan genomförda behandlingen av ekvationen $\Delta u = f$. I kap. 12 ges en tillämpning av Riesz' metod för vågekvationen på teorien för det elektromagnetiska fältet. Liénard-Wiecherts klassiska potential för fältet omkring en enda elektron härledes, varjämte skisseras en singularitetsfri lösning av det av Dirac behandlade problemet om elektronens energi och impuls. Den analytiska fortsättningen av Rieszfältstyrkan i fältet genererat av elektronen ger utanför elektronens världslinje det klassiska värdet men ger också ett ändligt och mycket naturligt värde på själva världslinjen, där det klassiska fältet ej har någon mening. Denna term, som kan betecknas som elektronens »egenfältstyrka på dess världslinje», leder till uppställandet av rörelseekvationer för elektronen, som äro identiska med de av Dirac angivna, tidigare av Lorentz på approximativ väg funna ekvationerna. Till slut behandlas i kap. 13 tillämpningen av Riesz' metod på mesonfältet, varvid speciellt studeras problem i samband med Bhabhas teori för mesoner i klassisk mening.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1468) *Till två sfärer drages en gemensam tangent samt dennas och centrallinjens gemensamma normal. Orten för normalens fotpunkt på tangenten är en rotationsyta, vars snittkurva med ett plan genom centrallinjen skall bestämmas.* *N. J.*

1469) *Man kan visa, att om en triangels sidor tangera en parabel, råkas de tre linjer, som förena ett hörn med motstående sidas tangeringspunkt, i en punkt. Sök orten för denna, om de tre tangenterna äro fasta och parabeln variabel.* *Less.*

1470) *I en cirkel med radien R äro* $AC = 2a$ *och* $BD = 2b$ *två mot varandra vinkelräta kordor. AB och DC råkas i U, AD och BC i V. Beräkna avståndet UV.* *X.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1471) I en ellips med axlarna AA_1 och BB_1 inskrivas två rektanglar med lika stora ytor. Deras på bågen AB belägna hörn äro P och Q. Visa, att PQ är parallell med AB.

1472) Normalen i punkten P på en ellips skär storaxeln i Q. Visa, att en cirkel med PQ som diameter av vardera brännpunktsradien till P avskär en korda lika med halva parametern.

1473) Parallellogrammen $OABC$ har hörnet O i en hyperbels centrum samt A och C på var sin av asymptoterna. Sidorna AB och CB skära hyperbeln i resp. D och E. Visa, att DE är parallell med AC.

1474) I en ellips äro OP och OQ två konjugerade halvdiametrar samt AB en mot OP vinkelrät diameter. Uttryck AQ och BQ i halvaxlarna a och b.

Svar: $a + b$ och $|a - b|$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1471—1473, 1481—1483 äro insända av *B-r*, 1474—1480 av *X*.

1475) Kordan AB i en parabel med fokus i F skär styrlinjen i P. A_1 och B_1 äro projektionerna av A och B på styrlinjen. Visa, att $PA_1 \cdot PB_1 = \overline{PF}^2$.

1476) Två rörliga tangenter till en parabel råka en fix tangent i A och B samt varandra i C. Sök orten för hörnet D i parallellogrammen $ACBD$.

Svar: Den till den fixa tangenten hörande diametern.

1477) Beräkna $y'' : yy'$ till funktionen $y = \left(\sin\frac{x}{2} + a\cos\frac{x}{2}\right) : \left(\cos\frac{x}{2} - a\sin\frac{x}{2}\right)$.

Svar: 1.

1478) Från en punkt på y-axeln dragas två mot varandra vinkelräta tangenter till kurvan $y = x + \frac{4}{x^2}$. Vilka vinklar bilda dessa med asymptoten $y = x$?

Svar: 22,5° och 67,5°.

1479) En tangent till kurvan $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ skär axlarna i A och B. Sök minimum för ytan av triangeln ABC, om C ligger i (1; 0,5).

Svar: $\frac{7}{32}$.

1480) Bestäm vinkelkoefficienten för en linje som är både tangent och normal till kurvan $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

Svar: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ eller $-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

1481) Tangenterna i punkterna A och B på kurvan $y = \frac{4}{x^2} - 1$ äro vinkelräta mot varandra. Kordan AB skär x-axeln i P och y-axeln i Q. Visa, att $AP = BQ$.

1482) Vilka tangenter till kurvan $x^2 + 24y = 0$ äro normaler till kurvan $y = x^2$?

Svar: $x - 2y + 3 = 0$ och $x + 2y - 3 = 0$.

1483) Två regelbundna tetraedrar med samma kantlinje a ligga på samma sida om det gemensamma basplanet. Basytorna ABC och $A_1B_1C_1$ äro placerade med A i mittpunkten av B_1C_1 och A_1 i mittpunkten av BC. Beräkna volymen av deras gemensamma del.

Svar: $\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$.

Lösn. till uppg. 1435—1437.

1435) *I en triangel drages en höjd, varigenom två deltrianglar uppstå. Uttryck höjden som funktion av radierna i de cirklar, som äro inskrivna i den ursprungliga triangeln och i deltrianglarna.*
C. E. Fröberg.

Sedan uppgiften publicerats har Nils Juringius insänt ett generaliserat problem, där »deltrianglarna» erhållas genom en godtycklig transversal AP genom ett av hörnen i triangeln ABC. Inskrivna cirkleln är $(I;\ r)$, de i deltrianglarna inskrivna cirklarna äro $(I_1;\ r_1)$ och $(I_2;\ r_2)$, tangeringspunkterna med BC äro resp. T, T_1 och T_2. Vi söka ett samband mellan r, r_1, r_2 och höjden h från A. Om de sistnämnda cirklarna fasthållas, medan A får röra sig på den gemensamma tangent, där den från början ligger, varierar triangeln ABC och cirkeln I (som kan övergå till att vara vidskriven) så att den senare *hela tiden tangerar BC i samma punkt T*. Detta inses sålunda. Tangeringspunkterna dela sidorna i $\triangle ABP$ i styckena PT_1, $AP - PT_1$ och BT_1 samt i $\triangle ACP$ i PT_2, $AP - PT_2$ och CT_2. Halva omkretsen p i triangeln ABC är $BT_1 + CT_2 + AP$ och $BT = p - AC = BT_1 + PT_2$ eller $T_1T = PT_2$.

Punkterna A och I beskriva alltså var sin räta linje, och då man kommer *entydigt* från A till B, därifrån till I_1 och I och på samma entydiga sätt från I tillbaka till A, kan sambandet mellan h och r, (vilka kunna användas som koordinater för A och I) skrivas $hr + ah + \beta r + \gamma = 0$, där α, β, γ äro vissa konstanter (C. E. Sjöstedt, Projektiv geometri sid. 27). Av figuren framgå följande specialfall 1. $h = \infty$, $r = r_1 + r_2$; 2. $h = 0$, $r = \infty$; 3. $h = 2r_1$, $r = r_1$. I analogi med det Newtonska skrivsättet av det entydiga sambandet mellan föremål- och bildkoordinat vid ett linssystem få vi relationen $h(r - r_1 - r_2) + 2r_1r_2 = 0$ eller $1 - \frac{2r}{h} = \left(1 - \frac{2r_1}{h}\right)\left(1 - \frac{2r_2}{h}\right)$. *X.*

Även löst av *B-r, B. Q., Hg., A. Lödemel, Less, J. A. Sandelin, E. Smn, G. Danielsson, A. Stenberg.*

1436) *I en aritmetisk serie är $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = A$, $t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 = B$, $t_1^3 + t_2^3 + \ldots + t_n^3 = C$. Uttryck C i A, B och n utan hjälp av formler för A, B och C.* *X.*

Termernas medeltal är $\frac{A}{n}$ och termerna äro $\frac{A}{n} \pm \frac{pd}{2}$, där p antar värdena 0, 2, ... $n-1$ för udda n samt värdena 1, 3 ... $n-1$ för jämnt n. I båda fallen är $B = \frac{A^2}{n} + \frac{d^2}{2} \cdot \Sigma p^2$ och $C = \frac{A^3}{n^2} + \frac{3A}{n} \cdot \frac{d^2}{2} \Sigma p^2 = \frac{3AB}{n} - \frac{2A^3}{n^2}$.

Löst av *B-r, B. Q., N. J., Less, A. Lödemel, J. A. Sandelin, Z.*

1437) *Linjen L tangerar parabeln $y^2 = 4ax$ i P och en rörlig parabel i Q. Den senare parabeln har x-axeln till vertextangent, och dess styrlinje går genom skärningspunkten mellan den fasta linjen $y = kx$ och en linje genom P, parallell med y-axeln. Sök orten för Q.* *N. J.*

Styrlinjens ekvation är $y = k \cdot \frac{y_P^2}{4a}$ och den senare parabelns ekvation $a(x - c)^2 = -ky_P^2 \cdot y$ (1). Identifiering av derivatornas värden i P och Q ger $\frac{2a}{y_P} = -\frac{2a(x_Q - c)}{ky_P^2}$, dvs. $x_Q - c = -ky_P$. Insättes detta i (1), blir $y_Q = -ak$. Orten är således den del av linjen $y = -ak$, som ligger utanför den givna parabeln. I punkten $\left(\frac{ak^2}{4}; -ak\right)$ sammanfalla P och Q. *B-r.*

Även löst av *B. Q., Hg., Less, A. Lödemel, J. A. Sandelin, E. Smn.*

Tidskrifter.

Fysisk Tidsskrift, København 1946: 1—2.

Ur innehållet: N. O. Lassen, Om Atomenergien; J. A. Christiansen, Om kemiske Reaktioners Hastighed og om Kædereaktioner; N. Arley, Nyere undersøgelser over den kosmiske straaling; M. Jørgensen, Bestemmelse av Tyngdeaccelerationen, Joules lag.

Naturens Verden, København 1946: 1—3.

Ur innehållet: Julie M. Vinter Hansen, Liv og Arbeide paa Lick-Observatoriet; A. Garboe, Naturvidenskabelige Museums-Historie og om Studiet af Naturvidenskabens Historie; V. Madsen, Jordens dybeste Boringer.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1946: 2.

Ur innehållet: W. Ljunggren, Aritmetiske egenskaper ved de Bernoulliske tall; Eksamensoppgaver; Oppgaver til løsning, løste oppgaver.

Fra Fysikkens Verden, Oslo 1946: 2.

Ur innehållet: K. A. Wingårdh, Röntgenstrålarna under 50 år; K. A. Wingårdh, 16:e skandinaviska naturforskarmötet i Kristiania år 1916; J. Holtsmark, De greske naturfilosofer; H. v. Ubisch, Cyklotron, synkrotron, betatron, atomforskerens tunge artilleri; S. Evjen, En studie over nedbørhyppigheten i Oslo; O. Lindstad, Litt om magnetiske drejefelter; R. Krekling, Apparat til å vise prinsippet for lydfilm; H. C. Plummer, A. S. Eddington 1882—1944.

Populær Astronomi, Oslo 1946: 2.

Ur innehållet: I. Ruud, Til månen i raket; H. S. Jelstrup, Planeten Neptunus oppdagelse; J. L. Greenstein, Undersøkelser av lyssterke stjerner; S. Storaker, Cassegrainkikkerten med coudéspeil.

Fyllnadsprövning efter studentexamen.

Augusti—september 1946.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} (ay + bx)^2 + a^2y^2 - b^2x^2 = 0, \\ b^2x^2 + a^2y^2 = abxy + a^2b^2, \end{cases}$$

där a och b äro givna storheter, som ej äro $= 0$.

2. Två sidor i en triangel äro 5 cm och 7 cm, och den mellanliggande vinkeln är 107,46°. Beräkna avståndet mellan fotpunkterna för höjderna mot de båda nämnda sidorna.

3. Sidan i en kvadrat $ABCD$ är 2 cm. Om kvadraten vrides 45° i sitt plan kring diagonalernas skärningspunkt, intar den läget $A_1B_1C_1D_1$. Beräkna omkretsen av den 8-uddiga stjärna, vars spetsar äro A, A_1, B, B_1, C, C_1, D och D_1.

4. En person har upptagit ett lån på 10 000 kr att amorteras under 20 år genom lika stora annuiteter. Första inbetalningen göres ett år efter lånets upptagande. Sedan lånet betalats, insätter personen vid slutet av vart och ett av de 10 följande åren i en bank en summa, lika stor som den förra annuiteten. Hur stort är hans tillgodohavande i banken efter sista insättningen? Ränta på ränta beräknas efter 3 %.

5. I triangeln ABC är AB 21 cm, BC 17 cm och AC 10 cm. En cirkel har sin medelpunkt på sidan AB och går genom A och C. Bestäm läget av de punkter, där cirkeln skär AB och BC.

6. I en likbent triangel, vars bas är 30 cm och höjd 5 cm, är ett likbent parallelltrapets med basvinklarna 45° inskrivet, så att dess större bas ligger utefter triangelns bas. Uttryck trapetsets yta som funktion av dess höjd, och bestäm genom grafisk konstruktion eller på annat sätt det största värde, som ytan kan antaga.

7. En kvadrat $ABCD$ har sidan 12 cm. En cirkel går genom hörnen A och B och tangerar sidan CD. Hur stor är ytan av den del av kvadraten, som ligger utanför cirkeln?

8. I triangeln ABC är $AB = AC$. Sammanbindningslinjen mellan B och den inskrivna cirkelns medelpunkt O utdrages och träffar

AC i D. Beräkna triangelns sidor och vinklar, då BO är 3 cm och OD 2 cm.

Resultat: **1.**

x	a	$-a$	$+\frac{a}{\sqrt{3}}$	$-\frac{a}{\sqrt{3}}$
y	0	0	$-\frac{b}{\sqrt{3}}$	$+\frac{b}{\sqrt{3}}$

2. 2,924 cm.

3. $16(2-\sqrt{2}) = 9{,}373$ cm. **4.** 7 705 kr. **5.** $4\frac{1}{3}$ cm och $5\frac{6}{17}$ cm från B. **6.** Ytan $= 30x - 5x^2$, där x är höjden; $y_{max} = 45$ cm² för $x = 3$ cm. **7.** 10,84 cm². **8.** $AB = AC = \sqrt{90} = 9{,}487$ cm; $BC = \sqrt{22{,}5} = 4{,}743$ cm, $\angle A = 28{,}96°$ och $\angle B = \angle C = 75{,}52°$.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Allmän kurs.

1. I en rätvinklig triangel är den ena spetsiga vinkeln 40°. Beräkna vinkeln mellan medianerna mot kateterna.
2. Ett lån, löpande med 4 % ränta på ränta, skall amorteras genom lika stora annuiteter, den första ett år efter lånets erhållande. Beräkna annuitetens storlek i procent av lånesumman, om efter 10 år, sedan annuiteten erlagts, endast $\frac{1}{3}$ av lånet skall återstå.
3. Ekvationerna för två sidor i en triangel äro $4x - y + 4 = 0$ och $3x + y - 4 = 0$. Triangelns tyngdpunkt ligger i punkten $(0; -\frac{2}{3})$. Vilken är ekvationen för triangelns tredje sida?
4. Lös ekvationen

$$3\cos^2 x + 2\sin 2x - 2\sin x - 4\cos x + 2 = 0.$$

5. $ABCD$ och $A_1B_1C_1D_1$ äro två motstående sidoytor i en kub. A och A_1, B och B_1, o. s. v. ligga på samma kantlinje. Genom AB och C_1D_1 lägges ett plan, genom BC och A_1D_1 ett annat. Beräkna vinkeln mellan dessa plan.
6. I en regelbunden sexsidig pyramid äro sidokanternas längder dubbelt så stora som baskanternas. En sfär har sin medelpunkt i mittpunkten av pyramidens basyta och tangerar sidokanterna. Hur många procent av pyramidens volym ligger inom sfären?
7. Upprita kurvan $y = x^3 + 2x^2$ i dess huvuddrag. Visa, att den räta linjen $3x - 4y + 9 = 0$ tangerar kurvan, och sök ekvationen för en tangent, som är vinkelrät mot nämnda räta linje.
8. Mätetalen för två sidor i en triangel äro rötter till ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$. En cirkel tangerar dessa båda sidor och har sin medelpunkt på den tredje sidan. Bestäm maximivärdet av denna cirkels radie.

Resultat: **1.** $36{,}45^\circ$ $\left(\text{vinkelns tangent} = \frac{3 \cdot \sin 80^\circ}{4}\right)$. **2.** $9{,}55$ %. **3.** $x - 2y - 6 = 0$. **4.** $90^\circ + n \cdot 360^\circ$; $-36{,}87^\circ + n \cdot 360^\circ$. Efter gruppering av termerna i vänstra ledet kan man bryta ut faktorn $(1 - \sin x)$, eller man kan utbyta 2 mot $(\cos^2 x + \sin^2 x + 1)$, då vänstra ledet blir $(2 \cos x + \sin x + 1)^2$. **5.** 60°. Parallellförflytta planens normaler, så att en liksidig triangel bildas. **6.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}(66\sqrt{5} - 125) = 81{,}9$ %. **7.** $36x + 27y + 8 = 0$. **8.** $-\frac{c}{b}$.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Specialkurs.

1. Från punkten $\left(3; \frac{22}{3}\right)$ dragas brännpunktsradierna till hyperbeln $16x^2 - 9y^2 + 32x + 12y + 156 = 0$. Sök längden av dessa radier.
2. Visa, att funktionen $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x+c}}$ satisfierar ekvationen $2(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} - 2xy + y^3 = 0$ för varje värde på konstanten c.
3. AB är lillaxeln i en ellips, F är ena brännpunkten och O medelpunkten. Förlängningen av den räta linjen AF skär ellipsen i ytterligare en punkt P. Ellipsens normal i P delar sträckan OF mitt itu. Beräkna ellipsens excentricitet.
4. Bestäm koefficienterna a och b i funktionen

$$y = a \sin^2 x + b \sin x,$$

så att tillhörande funktionskurva får en inflexionspunkt i punkten $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{3}{8}\right)$. Konstruera därefter kurvan i dess huvuddrag.

5. Upprita kurvan $xy + x - 8y = 0$. En punkt P på kurvan sammanbindes med origo O. Undersök och åskådliggör grafiskt i ett särskilt diagram, hur kvadraten på längden av sträckan PO varierar, när punkten P beskriver kurvan.
6. Sök och konstruera orten för brännpunkten till en parabel, som tangerar de givna räta linjerna $y = x \operatorname{tg} A$ och $y = x \operatorname{tg} B$ och vars axel är parallell med x-axeln.
7. Bevisa, att olikheten $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, där x mätes i radianer, gäller för $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Resultat: 1. $4\frac{1}{3}$ och $12\frac{1}{3}$ enh. 2. Lös c och derivera implicit. 3. Excentriciteten är $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Låt koord. för A och F vara resp. $(0; b)$ och $(c; 0)$. Enl. bissektrissatsen blir förhållandet mellan P:s brännpunktsradier 1:3, vadan $FP = \frac{a}{2}$ och P:s koord. $\left(\frac{3c}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ osv. Eller: Ur den likbenta triangeln PF_1A fås $\cos A = \frac{1}{3}$ och $e = \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 4. $a = -\frac{3}{2}$; $b = \sqrt{3}$. Kurvan har nollpunkter i $x = n \cdot \pi$, max. i $(0{,}6156 + 2\pi \cdot n;\ 0{,}5)$ och i $(2{,}5260 + 2\pi \cdot n;\ 0{,}5)$ samt min. i $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n;\ \sqrt{3} - 1{,}5\right)$ och i $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot n;\ -\sqrt{3} - 1{,}5\right)$. Linjerna $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ äro symmetriaxlar. 5. Kurvan är en hyperbel med asymptoterna $x - 8 = 0$ och $y + 1 = 0$. Man får $\overline{PO}^2 (= z) = x^2 + \frac{x^2}{(x-8)^2}$. Med från $-\infty$ till 0 växande x avtar z från ∞ till 0 för att sedan öka till ∞, när $x \to 8$. Om slutligen $x \to \infty$, avtar z först till ett min. $= 125$ för $x = 10$ (då OP är normal till den givna kurvan) för att sedan växa till ∞. z-kurvan ansluter sig asymptotiskt till parabeln $y = x^2 + 1$. 6. Orten är den räta linjen $y = x \cdot \operatorname{tg}(A + B)$. Vertextangenten (T) skär de givna linjerna i A_1 och B_1. Då äro A_1F och B_1F dessas normaler (F är fokus), varför en cirkel kan läggas genom A_1, B_1, F och origo O. Alltså är $\sphericalangle B_1OF =$ vinkeln v mellan A_1F och T, vilken $= A$, om $0 < A < 90°$, resp. $= 180° - A$, om $90° < A < 180°$. Riktningsvinkeln för OF blir i förra fallet $= B + v = B + A$, i senare fallet $= B - v = B + A - 180°$. 7. $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \frac{k^2}{2}$, där k är kordan till bågen x i enhetscirkeln. Då $k^2 < x^2$ för $x \neq 0$, är påståendet bevisat.

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1, 4, 5, 7 och 8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En kropp rör sig utan friktion på ett lutande plan, som bildar vinkeln 30° med horisontalplanet. Vid starten har den ingen hastighet i lutningsriktningen men däremot hastigheten 10 m/sek i horisontell led, vinkelrätt mot lutningsriktningen. Upprita den

kurva kroppen följer under de 5 första sekunderna av sin rörelse på planet.

2. Man ville analysera en gasblandning, som bestod av koloxid och koldioxid. Blandningen pumpades med jämn hastighet genom en gasmätare, som angav den genomströmmade gasmassans volym vid rådande barometerstånd, och man fann, att mätarens ställning på 51 min ändrades från 4 m^3 980 liter till 5 m^3 40 liter. Barometerståndet var därvid 758 mm kvicksilver. Utan att gasströmmens hastighet ändrades, ledde man den därefter för en kortare tid över till ett graderat, upptill slutet rör, som stod vertikalt med nedre ändan i en stark lösning av kaliumhydroxid och från början var fyllt med samma lösning. Gasen leddes in i röret underifrån, varvid koldioxiden absorberades, medan i röret på 100 sek samlades 445 cm^3 koloxid, vars tryck efter vederbörliga korrektioner beräknades till 751 mm kvicksilver. Beräkna gasblandningens sammansättning i volymsprocent. Temperaturen antages konstant.
3. Vid en laboration bestämmes alkohols ångbildningsvärme på följande sätt. En glaskolv, som är väl isolerad med filt, är till omkring hälften fylld med alkohol och sluten med en kork, genom vilken ett omböjt glasrör och två koppartrådar gastätt inpassats. Trådarna äro förbundna med en i vätskan nedsänkt isolerad motståndsspiral av konstantantråd på 25 Ω. Glasrörets fria ända är förbunden med en kylare. Där kondenseras alkoholången, varefter den kondenserade alkoholen uppsamlas i ett mätglas. En ström av 0,50 A påsläppes. Då kokningen fortgått en stund, är vätskevolymen i mätglaset 13,1 cm^3. Efter ytterligare 10 min har den stigit till 18,6 cm^3. Alkoholens täthet är 0,79 g/cm^3. Beräkna dess ångbildningsvärme.
4. Ett likbent prisma och en plan spegel äro uppställda så, att spegeln ligger i förlängningen av prismats basplan. En ljusstråle i huvudsnittet passerar prismat under minimideviation och reflekteras därefter mot spegeln. Visa, att den reflekterade strålen är parallell med den mot prismat infallande.
5. En tunn plankonvex glaslins, vars buktiga yta försetts med speglande beläggning och därefter övermålats med ett skyddande, ogenomskinligt färgskikt, kan tjänstgöra som förstoringsspegel (»rakspegel»), varvid slutbilden är virtuell. Föremålet får ej ligga alltför långt från linsen. Hur långt från linsen kan ett föremål på huvudaxeln högst ligga, om slutbilden skall bli virtuell? Den konvexa linsytans radie är r cm. I figuren kan föremålet tecknas punktformigt, men strålgången måste tydligt framgå av densamma.

6. En elektrisk belysningsanläggning för 220 V är inkopplad mellan två poler i ett likströmsnät. Energiförbrukningen avläses på en mätare, på vilken det står angivet, att bromsskivan gör 2 400 varv, medan 1 kWh förbrukas. Man vill ha reda på den högsta ifrågakommande strömbelastningen i de ledningar, som förbinda anläggningen med nätet, men har icke att tillgå något annat instrument än mätaren. Man finner emellertid, att mätarens bromsskiva gör 100 varv på 2 min 8 sek, om alla lamporna äro tända. Beräkna därav den sökta strömstyrkan.
7. Ett motstånd på 75 Ω är anslutet till en väggkontakt för 220 V likström. Två punkter B och B' på motståndet äro förbundna med var sin klämskruv C respektive C'. Motståndet mellan B och B' är 15 Ω; motståndet hos förbindelsetrådarna BC och $B'C'$ kan lämnas ur räkningen. Inkopplar man mellan C och C' ett yttre motstånd r_y, uppstår i detta en ström i. Strömstyrkan är densamma, som om C och C' vore polklämmor på ett visst batteri, vars elektromotoriska kraft e och inre motstånd r_i ha konstanta siffervärden, vilka icke bero av i och r_y. Sök e och r_i.
8. För bestämning av jordmagnetismens horisontalintensitet begagnades ett transportabelt instrument, väsentligen bestående av en rörlig kompassdosa med en vidfästad arm av omagnetiskt material. Vid den fria ändan uppbar armen en stavmagnet, vars längdriktning gick genom kompassnålens medelpunkt. Kompassdosan jämte armen kunde vridas kring en vertikal axel, varvid stavmagneten rörde sig i ett horisontalplan. När mätningarna skulle utföras, vreds instrumentet först, tills kompassnålen ställde sig vinkelrätt mot stavmagnetens längdriktning. Därefter avlägsnades stavmagneten, varvid kompassnålen intog ett nytt jämviktsläge, och vinkeln mellan kompassnålens båda lägen avlästes. På en plats, där horisontalintensiteten var 0,165 cgs-enheter, uppgick denna vinkel till 60,0°. Försöket upprepades på en annan ort. Stavmagneten placerades därvid i samma läge i förhållande till kompassdosan som vid det första försöket. När den borttogs, vred sig nålen 55,5°. Hur stor var horisontalintensiteten på denna ort? Kompassnålen är kort i förhållande till dess avstånd från stavmagneten.

Resultat: **2.** 22,5 % CO och 77,5 % CO_2. **3.** 207 cal/g. **5.** Högst på avståndet $\frac{r}{3}$. **6.** 5,33 A. **7.** $e = 44$ V och $r_i = 12$ Ω. **8.** 0,173 cgs-enheter.

Nya böcker — nya upplagor

Formelsamling i matematik och fysik

Fastställd av Kungl. skolöverstyrelsen 18 maj 1946 för användning vid de skriftliga proven i studentexamen.

Utkommer i september i år.

Magnhild Gentz

Nu räknar vi själva

Räknebok för första skolåret. Med talrika illustrationer. Kr 0: 90; lärarex. kr 0: 50 inkl. oms.

Hedström—Öije

Matematiska uppgifter i realexamen

VT 1907—VT 1945. 19:e uppl. Kr 0: 90.

Norgren—Bjurulf

Provräkningsuppgifter

till Folkskolans räknebok VI, åttonde klass. 10 räkneblad med facit. Kr 0: 30, netto för skolor kr. 0: 25.

Hjalmar Olson

Algebra och planimetri för realgymnasiet

4:e, nästan oförändrade uppl. Inb. kr 3: 95, lärarex. kr 2: 10 inkl. oms.

B. Wahlström

Matematiska uppgifter

givna i studentexamen på latinlinjen jan. 1936—VT 1945. Med svar och anvisningar. Kr 1: —.

B. Wahlström

Matematiska uppgifter

givna i studentexamen på reallinjen VT 1896—VT 1946. Urval för specialkurs. Med svar och anvisningar. 5:e uppl. Kr 1: 35.

Einar Öije

Läraren, lärjungen, allmänheten

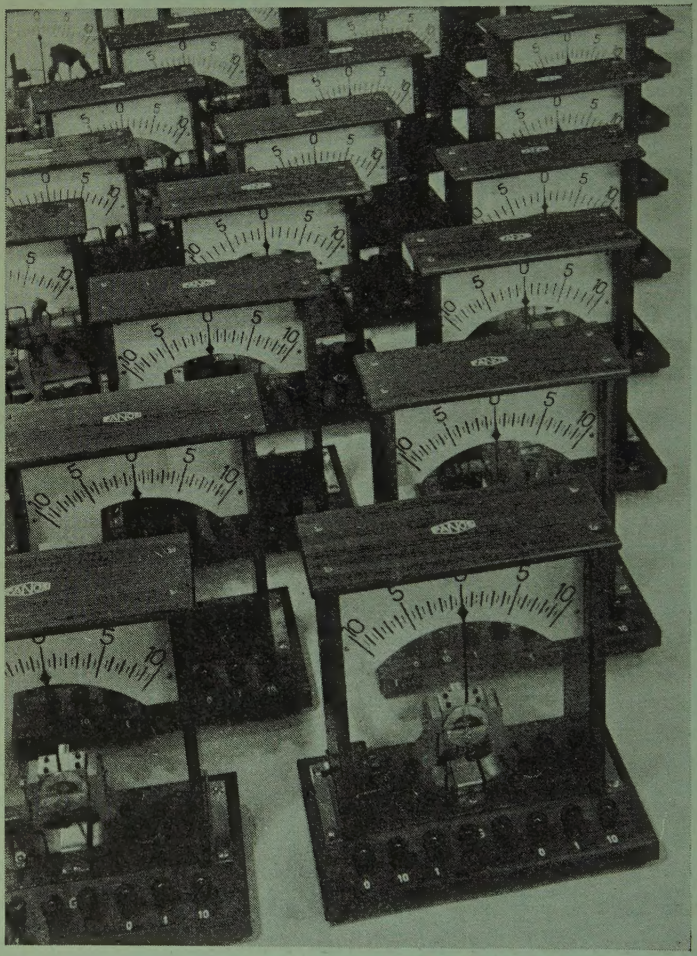
En lärares funderingar. Kr 1: 85.

SVENSKA BOKFÖRLAGET

MÄTINSTRUMENT

från

NORSTEDTS VERKSTAD



Begär offert

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen Stockholm

LUND 1946, HÅKAN OHLSSONS BOKTR.